Lagrangeの未定乗数法（その２）

戸瀬信之

Dec 19, 2018
V04 Nov. 25, 2020 for CalcNT

Lagrangeの未定乗数法（その２）

戸瀬信之

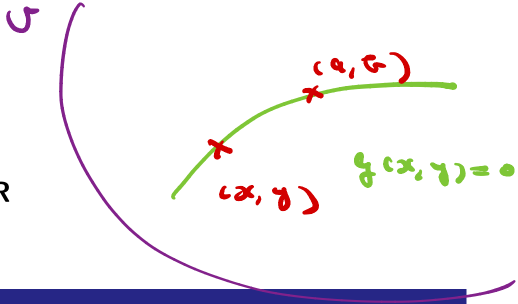
Dec 19, 2018
V04 Nov. 25, 2020 for CalcNT

制約条件付き極値問題

U を $\mathbf{R}^2$ の開集合とする．2 関数

$$f, g: \ U \to \mathbf{R}$$

が与えられているとき



問題

$g(x,y) = 0$ の下で $z = f(x,y)$ を極大化（極小化）する

最大化（最小化）

復習—定理

(a,b) の近くで $g(x,y)=0$ が $y=\varphi(x)$ と解ける
（陰関数定理）

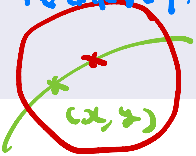
定理

$g(a,b)=0,\ g_y(a,b)\neq 0$ を満たす $(a,b)\in U$ において制約条件付き極値問題が極大値（極小値）をとるとします．このとき次の (L) を満たす $\lambda\in\mathbf{R}$ が存在します．

未定乗数

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \underbrace{f_x(a,b)}_{\nabla(f)(a,b)} & + & \lambda g_x(a,b) & = & 0 \quad (1)\\ f_y(a,b) & + & \underbrace{\lambda g_y(a,b)}_{=\lambda\nabla(g)(a,b)} & = & 0 \quad (2)\\ & & g(a,b) & = & 0 \quad (3)\end{array}\right. \qquad \text{(L)}$$

← 接線条件．



ここで (1) と (2) を**接線条件**と呼びます．

$\exists\delta>0\quad \left.\begin{array}{l}(x,y)\in B_\delta(a,b)\\ g(x,y)=0\end{array}\right\}\Rightarrow f(x,y)\leq f(a,b)$

$\geq$

接線条件

$\nabla(f)(a,b) \parallel \nabla(g)(a,b)$

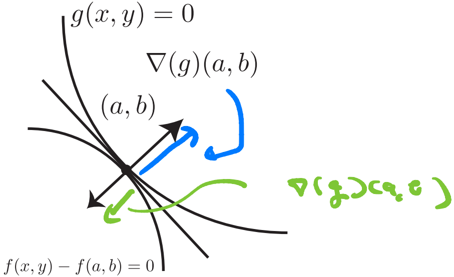
接線条件は

$$\nabla(f)(a,b) = -\lambda \cdot \nabla(g)(a,b)$$

と表せます．$\nabla(f)(a,b)$ は f の等高線

$$f(x,y) - f(a,b) = 0$$

の (a,b) における法線ベクトルです．



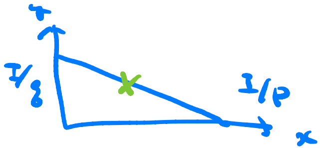
2 曲線 $g(x,y) = 0$ と $f(x,y) - f(a,b) = 0$ は接線を共有しますから，接していることが分かります．

	1財	2財
購入	x	y
価格	p	q

I 予算

例 $I, p, q > 0$ とする．予算制約

$$g(x, y) = I - px - qy = 0 \quad (x, y > 0)$$



の下で効用関数

$$u(x, y) = \underline{\sqrt{xy}}$$

を最大化する．この問題は第 1 財，第 2 財の価格が p, q のときに，予算 I をすべて支出して第 1 財を x, 第 2 財を y 購入して効用を最大化するという問題である．

$$g_x = -p, \quad g_y = -q, \quad u_x = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}, \quad u_y = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}.$$

制約条件付き極値問題—ミクロ経済学の例 (2)

(x, y) で極大・極小であるとすると

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} + \lambda(-p) = 0 & (1) \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \lambda(-q) = 0 & (2) \\ I - px - qy = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x(x,y) + \lambda g_x(x,y) = 0 \\ u_y(\ ) + \lambda g_y(\ ) = 0 \\ g(\ ) = 0 \end{cases}$$

$x\cdot \to \sqrt{xy}.$

$\lambda = 0$ とすると $\frac{1}{2}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = 0$ $\vee$ 0 impossible.

$px + qy = I.$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．(1) $\times x$, (2) $\times y$ を考えると

$$\sqrt{xy} = 2\lambda px = 2\lambda qy$$

であることが分かります．(1) を考えると $\lambda \neq 0$ であることが分かりますから

$$px = qy$$

$\lambda = \frac{1}{2p}\cdot\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \cdots.$

さらに (3) から

$$px = qy = \frac{I}{2} \quad 従って \quad x = \frac{I}{2p}, \quad y = \frac{I}{2q}$$

制約条件付き極値問題—ミクロ経済学の例 (3)

$$x(p, q, I) = \frac{I}{2p}, \quad y(p, q, I) = \frac{I}{2q}$$

を**需要関数**と呼びます．さらに (1) から Lagrange の未定乗数が

$$\frac{1}{2p} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} =$$

$$\lambda = \frac{1}{2p} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\cancel{I}}{2q}}}{\sqrt{\frac{\cancel{I}}{2p}}} = \frac{1}{2\sqrt{pq}}$$

と求まります．この状況で $\lambda(p, q, I)$ を**所得の限界効用**と呼びます．

間接効用関数

$U(p, q, I) = u(x(p, q, I), y(p, q, I))$ に対して $\dfrac{\partial U}{\partial I} = \lambda(p, q, I)$

$$U(p, q, I) = \left(\frac{I}{2p}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{I}{2q}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{I}{2\sqrt{pq}}.$$

$$\frac{\partial U}{\partial I} = \frac{1}{2\sqrt{pq}} = \lambda(p, q, I)$$

と成立している.

所得の限界効用

$$U = \sqrt{x(p,q,I)\,y(p,q,I)}$$

$$v(p,q,I) = u(x(p,q,I), y(p,q,I)) = \sqrt{\frac{I}{2p}} \cdot \sqrt{\frac{I}{2q}} = \frac{I}{2\sqrt{pq}}$$

を**間接効用関数**と呼びます．このとき

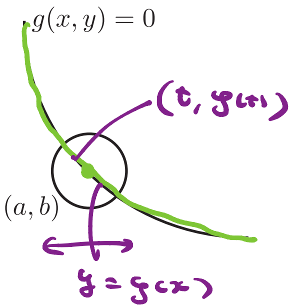
$$\frac{\partial v}{\partial I} = \frac{1}{2\sqrt{pq}} = \lambda(p,q,I)$$

となります．これが $\lambda(p,q,I)$ が所得の限界効用と呼ばれる理由です．この等式

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \lambda(p,q,I)$$

は一般的に成立します．

極大・極小の十分条件



$$g(a,b)=0, \quad g_y(a,b)\neq 0$$

を仮定して，陰関数定理を適用する．(a,b) の近くで

$$y=\varphi(x)$$

と曲線 $g(x,y)=0$ を表す．

(a,b) で極大（極小）ならば

$$F(t)=f(t,\varphi(t))$$

とすると $F'(a)=0$ が従う．

$$F''(a)>0 \quad (\text{resp. } F''(a)<0)$$

ならば (a,b) で極小（resp. 極大）となります．

解法 (2)

$x(t)=t$

$y(t)=\varphi(t)$

Chain Rule を使うと $F(t) = f(t, \varphi(t))$

$$F'(t) = f_x(t, \varphi(t)) \cdot 1 + f_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

$(t)'$

Youngの定理.

$f_{xy} = f_{yx}$

$$\begin{aligned}
F''(t) &= f_{xx}(t, \varphi(t)) \cdot 1 + f_{xy}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\
&\quad + \varphi'(t) \left(f_{yx}(t, \varphi(t)) \cdot 1 + f_{yy}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \right) \\
&\quad + f_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi''(t) \\
&= f_{xx}(t, \varphi(t)) + 2 f_{xy}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) + f_{yy}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t)^2 \\
&\quad + f_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi''(t)
\end{aligned}$$

$$\varphi'(a) = -\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}$$

代入.

$$F(t) = f(\overbrace{x(t), y(t)}^{P_t})$$

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

$$= \left(\nabla f(P_t), \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \right)$$

課題 $F''(t) = \cdots$

解法 (3)

$t \to a.$

さらに $g(t, \varphi(t)) \equiv 0$ の両辺を t で微分して

$$g_x(t, \varphi(t)) \cdot 1 + g_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \equiv 0$$

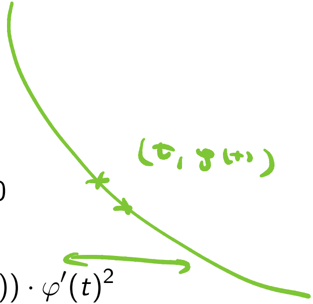
$(t)'$

$$g_{xx}(t, \varphi(t)) + 2g_{xy}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) + g_{yy}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t)^2$$
$$+ \; g_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi''(t) \equiv 0$$

を得ます.

$t \to a.$

$\varphi''(a) = \cdots$



$g(x, y) = 0$

解法 (4)

$t = a$ とするとき $P_0(a, b)$ と定めて

$$\varphi'(a) = -\frac{g_x(P_0)}{g_y(P_0)}$$

代入 ←

$$\varphi''(a) = -\frac{1}{g_y(a, b)}\left(g_{xx}(P_0) + 2g_{xy}(P_0)\cdot\varphi'(a) + g_{yy}(P_0)\cdot\varphi'(a)^2\right)$$

$\neq 0$

となります.

解法 (5)

さらに

$\longrightarrow f_y(a,b) + \lambda g_y(a,b) = 0$

$$
\begin{aligned}
F''(a) &= f_{xx}(P_0) + 2f_{xy}(P_0)\cdot\varphi'(a) + f_{yy}(P_0)\cdot\varphi'(a)^2 \\
&\qquad + f_y(P_0)\cdot\varphi''(a) \\
&= f_{xx}(P_0) + 2f_{xy}(P_0)\cdot\varphi'(a) + f_{yy}(P_0)\cdot\varphi'(a)^2 \\
&\qquad \boxed{-\frac{f_y(P_0)}{g_y(P_0)}}\left(g_{xx}(P_0) + 2g_{xy}(P_0)\cdot\varphi'(a) + g_{yy}(P_0)\cdot\varphi'(a)^2\right) \\
&= L_{xx}(P_0,\lambda) + 2L_{xy}(P_0,\lambda)\cdot\varphi'(a) + L_{yy}(P_0,\lambda)\cdot\varphi'(a)^2
\end{aligned}
$$

“λ”

$$\boxed{\lambda := -\frac{f_y(P_0)}{g_y(P_0)}}$$

が成立します．ここで

$$\lambda = -\frac{f_y(P_0)}{g_y(P_0)}, \quad L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\cdot g(x,y)$$

としました．

さらに

<0 　　　　　大

$$F''(a) \quad >0 \quad \to \quad \text{極小}$$

$$= L_{xx}(P_0, \lambda) + 2L_{xy}(P_0, \lambda) \cdot \left(-\frac{g_x(P_0)}{g_y(P_0)}\right) + L_{yy}(P_0, \lambda) \cdot \left(-\frac{g_x(P_0)}{g_y(P_0)}\right)^2$$

$$= \frac{1}{g_y(P_0)^2}\Big(L_{xx}(P_0, \lambda) \cdot g_y(P_0)^2 - 2L_{xy}(P_0, \lambda) \cdot g_x(P_0)g_y(P_0)$$

$$+ L_{yy}(P_0, \lambda) \cdot g_x(P_0)^2\Big)$$

$$= -\frac{1}{g_y(P_0)^2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & g_x(a,b) & g_y(a,b) \\ g_x(a,b) & L_{xx}(a,b,\lambda) & L_{xy}(a,b,\lambda) \\ g_y(a,b) & L_{yx}(a,b,\lambda) & L_{yy}(a,b,\lambda) \end{vmatrix}}_{} \quad \begin{matrix} >0 \\ <0 \end{matrix}$$

$\vee 0$

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & A & C \\ \beta & C & B \end{vmatrix} = -A\beta^2 + 2C\alpha\beta - B\alpha^2$$

定理

$$\begin{cases} f_x(a,b) + \lambda g_x(a,b) = 0 & (1) \\ f_y(a,b) + \lambda g_y(a,b) = 0 & (2) \\ g(a,b) = 0 & (3) \end{cases}$$

(L)

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在するとします．さらに

$$B(a,b,\lambda) := \begin{vmatrix} 0 & g_x(a,b) & g_y(a,b) \\ g_x(a,b) & L_{xx}(a,b,\lambda) & L_{xy}(a,b,\lambda) \\ g_y(a,b) & L_{yx}(a,b,\lambda) & L_{yy}(a,b,\lambda) \end{vmatrix}$$

に対して $B(a,b,\lambda) < 0$ ならば (a,b) で極小となります．$B(a,b,\lambda) > 0$ ならば (a,b) で極大となります．ここで

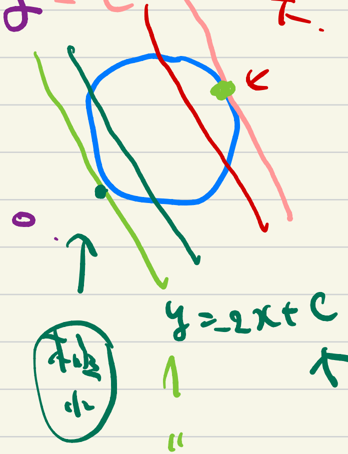
$$L(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

と定めています．

前(2) (L08) の534

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad f(x,y) = 2x + y = C$

$$\begin{cases} g_x = 2x, \ g_y = 2y, \quad f_x = 2, \ f_y = 1 \\ g_{xx} = 2, \ g_{xy} = g_{yx} = 0, \ g_{yy} = 2, \quad f_{**} = 0. \end{cases}$$



$L = f + \lambda g.$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = -8\lambda(x^2+y^2)$$

$$= -8\lambda$$

(i) $\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $(x,y) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ のとき $B = -4\sqrt{5} < 0 \rightarrow$ 極小.

(ii) $\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, $(x,y) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ のとき $B = 4\sqrt{5} > 0$ 極大.

$\varphi''(a)$

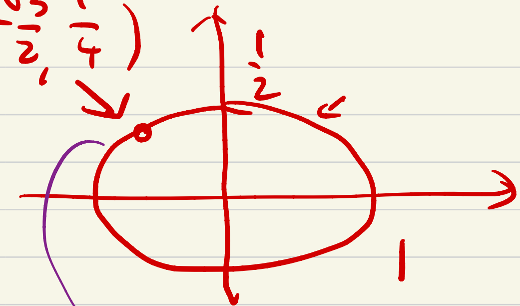
$$\varphi'(a) = -\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}$$

$$\begin{aligned}
\varphi''(a) &= -\frac{1}{g_y(a,b)}\left(g_{xx}(P_0) + 2g_{xy}(P_0)\cdot\varphi'(a) + g_{yy}(P_0)\cdot\varphi'(a)^2\right) \\
&= -\frac{1}{g_y(a,b)^3}\Big(g_{xx}(P_0)\cdot g_y(P_0)^2 - 2g_{xy}(P_0)\cdot g_x(P_0)g_y(P_0) \\
&\qquad + g_{yy}(P_0)\cdot g_x(P_0)^2\Big) \\
&= \frac{1}{g_y(a,b)^3}\begin{vmatrix} 0 & g_x(a,b) & g_y(a,b) \\ g_x(a,b) & g_{xx}(a,b) & g_{xy}(a,b) \\ g_y(a,b) & g_{yx}(a,b) & g_{yy}(a,b) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

つまり 行列式!

$$g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 1 = 0$$

$P_0\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right)$



$$g_x = 2x, \quad g_y = 8y$$

$$g_{xx} = 2, \quad g_{xy} = g_{yx} = 0, \quad g_{yy} = 8$$

$$g_y\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right) = 2$$

$$\varphi''\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2^3}\begin{vmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 2 \\ -\sqrt{3} & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}(-8 - 24) = -4 < 0$$