効用関数の最大化（その 1）

狭義凹の効用関数

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

V01 Dec 02, 2020 for CalcNT

	第1財	第2財
購入量 →	x	y
価格 →	p	q

Income

$p, q, I > 0$ としします．第 1 財を x, 第 2 財を y 購入したときの効用関数 $(x, y > 0)$

予算

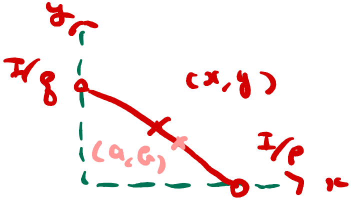
$$u : \mathbf{R}^2_{++} \to \mathbf{R}$$

(utility function)

を制約条件

$$g(x,y) = I - px - qy = 0$$

の下で**最大化**することを考えます．

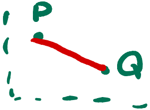


第1象限 (1st quadrant)

$$\mathbb{R}^2_{++} := \{(x, y) ; x, y > 0\}$$

$\cap$ $\mathbb{R}^2$

開, 凸



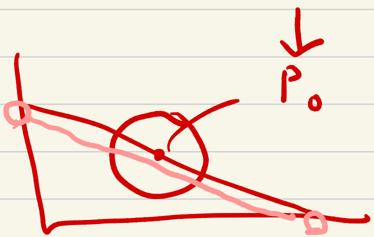
$P, Q \in \mathbb{R}^2_{++}$

$\Rightarrow \overline{PQ} \subset \mathbb{R}^2_{++}$

$P_0(a, b)$ で 極大 $\Longrightarrow$ (Lagrange) $\exists \lambda \in \mathbb{R}$

$\Uparrow$

P_0 で 最大.



$$(\#)\ \begin{cases} u_x(P_0) + (-p)\lambda = 0 \\ u_y(P_0) + (-q)\lambda = 0 \\ I - px - qy = 0 \end{cases}$$

(必要)

$(\#)$ かつ. $L = u + \underbrace{(I - px - qy)}$ Lagrange 関数

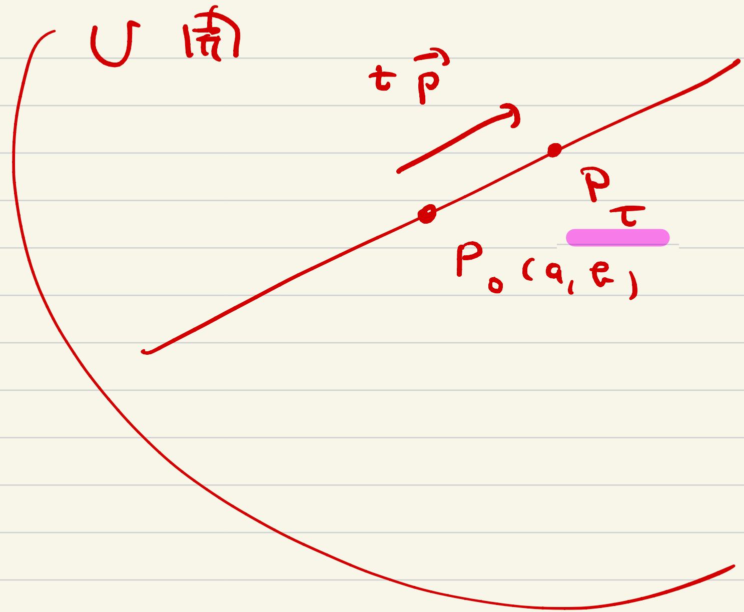
$$\begin{vmatrix} 0 & -p & -q \\ -p & u_{xx}(P_0) & u_{xy}(P_0) \\ -p & u_{yx}(P_0) & u_{yy}(P_0) \end{vmatrix} > 0 \Longrightarrow (a, b) \text{ で 極大.}$$

$P_0(a,b) \in U$, $\vec{p} \neq \vec{0}$

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$　C^2級

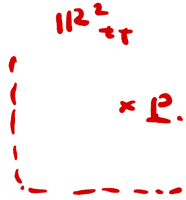
$F(t) = f(P_t)$

$$\left\{\begin{aligned} F'(t) &= \left(\nabla(f)(P_t), \vec{p}\right) \\ F''(t) &= \left(\underbrace{H(f)(P_t)}_{\text{対称行列.}}\,\vec{p}, \vec{p}\right) \end{aligned}\right.$$



方向微分.

前提



効用関数が条件

$$u_{xx}(\mathrm{P}) < 0, \quad \det(H(u)(\mathrm{P})) = \begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{vmatrix} > 0 \quad (\mathrm{P} \in \mathbf{R}^2_{++}) \tag{1}$$

(P)

を満たすと仮定します.

$$(H(u)(P)\vec{v}, \vec{v}) < 0 \quad (\vec{v} \neq 0)$$

$P \in \mathbb{R}^2_{++}$

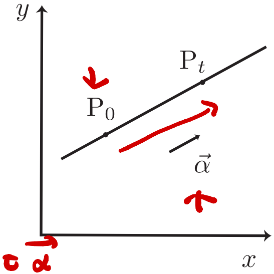
$\boxed{\rightarrow \quad v''(t) < 0.}$ $\quad w(t) = u(P_0 + t\vec{v}) \leftarrow$

前提からの帰結—2 階の方向微分

$\mathrm{P}_0 \in \mathbf{R}^2_{++}$, $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ を満たす $\vec{\alpha} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$U(t) := u(\overbrace{\mathrm{P}_0 + t\vec{\alpha}}^{\mathrm{P}_t}) = u(\mathrm{P}_t)$$

と関数を定義すると，仮定 (1) の下で



$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_t} = t\vec{\alpha}$

$$U''(t) < 0$$

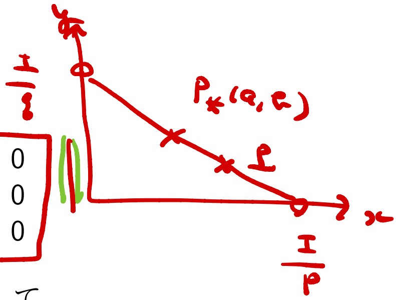
が常に成立します.

結論

$\mathrm{P}_*(a,b) \in \mathbf{R}^2_{++}$ においてある $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在して

未定乗数.

$$\left\{\begin{array}{lcccc} u_x(\mathrm{P}_*) & + & \lambda(-p) & = & 0 \\ u_y(\mathrm{P}_*) & + & \lambda(-q) & = & 0 \\ I - pa - qb & & & = & 0 \end{array}\right.$$



が成立すると仮定します．このとき $\mathrm{P}(x,y) \in \mathbf{R}^2_{++}$ に対して

$$\mathrm{P} \neq \mathrm{P}_*, \quad I - px - qy = 0 \Rightarrow u(\mathrm{P}) < u(\mathrm{P}_*)$$

uはP_*で制約条件下で
最大値をとる.

P_t

$$U(t) = u\left(qt, \frac{I}{q} - pt\right)$$

とすると

$$U'(t) = u_x\left(qt, \frac{I}{q} - pt\right)\cdot q + u_y\left(qt, \frac{I}{q} - pt\right)\cdot(-p)$$

$= \left(\nabla(u)(P_t), \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}\right)$

から $\mathrm{P}_{t_0} = \mathrm{P}_*$ とすると　$t = t_*$

$$U'(t_0) = u_x(\mathrm{P}_0)\cdot q + u_y(\mathrm{P}_0)\cdot(-q) = \lambda pq + \lambda q(-p) = 0$$

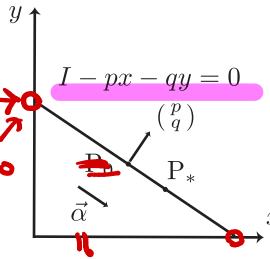
らに $U''(t) < 0$ から

$$U(t) < U(t_0) \quad (t \neq t_0)$$

$u_x(P_*) = \lambda p$

$u_y(P_*) = \lambda q$

$\left(\begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right) = 0$



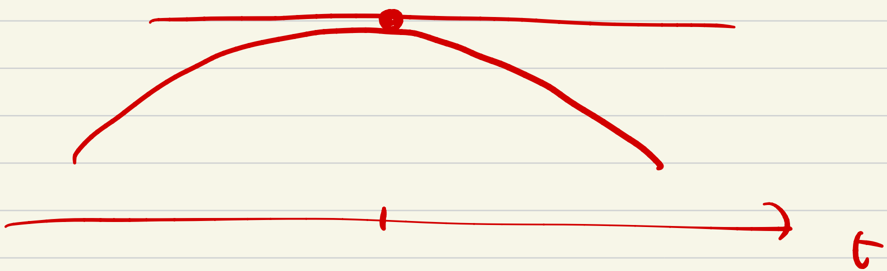
$\frac{I}{q} - pt = 0$

$t = \frac{I}{pq}$

さ

Chain Rule

$$\frac{d}{dt} u(x(t), y(t)) = u_x(P_t) \cdot x'(t) + u_y(P_t) \cdot y'(t)$$



$u''(t) < 0$

$t = t_*$ $\quad P_*$

具体例 (1)

Cobb-Douglass 型効用関数

$$u(x, y) = Cx^{\alpha}y^{\beta} \quad (\alpha, \beta > 0, C > 0)$$

が条件 (1) を満たす必要十分条件は

$$\alpha + \beta < 1$$

です（演習問題）.

$u_{xx}(p) < 0 \quad (p \in \mathbb{R}^2_{++})$

$\det(H(u)(p)) > 0 \quad (p \in \mathbb{R}^2_{++})$

具体例 (2)

例えば

$$u(x, y) = \sqrt{xy}$$

$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

の場合は

$$u_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}, \quad u_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

$\alpha + \beta = 1.$

$$u_{xx} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{y}}{x\sqrt{x}}, \quad u_{xy} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}}, \quad u_{yy} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}$$

計算は

$2+3=5.$

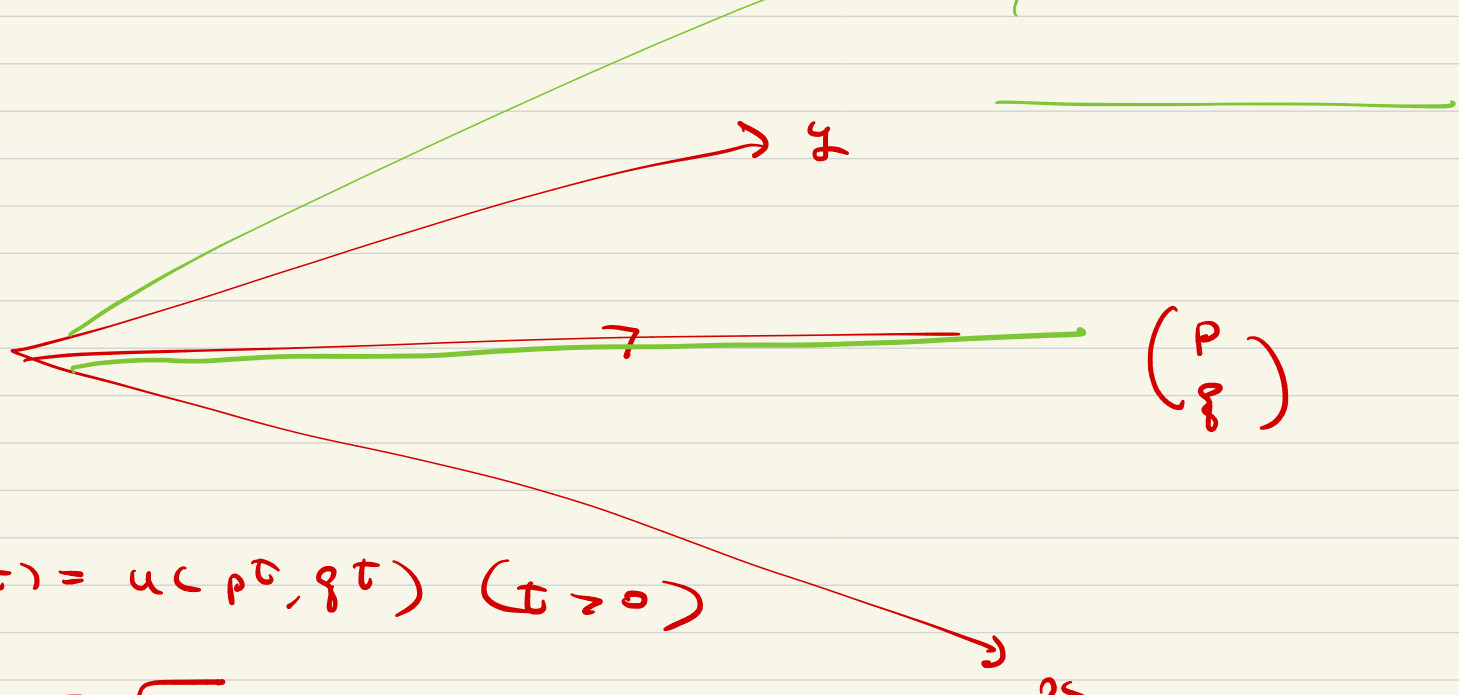
から

$$\det(H(u)) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{y}}{x\sqrt{x}} & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \\ \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}} & -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{x}}{y\sqrt{y}} \end{vmatrix} = \frac{1}{16}\frac{1}{xy} - \frac{1}{16}\frac{1}{xy} = 0$$

と条件 (1) は満たしませんが，停留点で最大値を取ります．（これを含む一般論もあります．）

狭義準凹 strictly quasi-concave.

$$u(x, y) = \sqrt{xy}$$



$$U(t) = u(pt, qt) \quad (t > 0)$$

$$= \sqrt{pq}\, t .$$