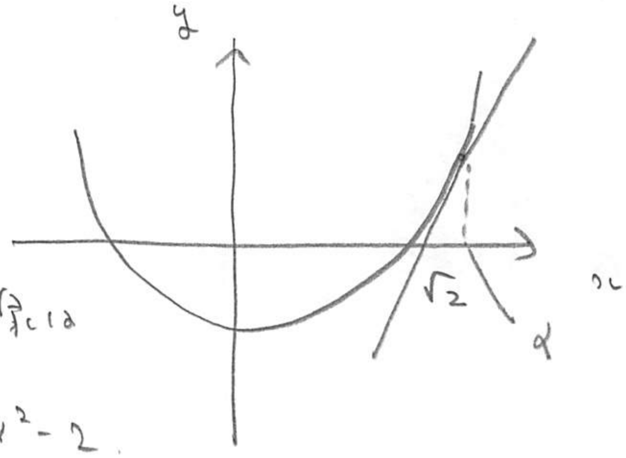
$\sqrt{2}$ の求め方. Newton法



$\alpha > \sqrt{2}$ とします (α, α^2-2) における $y = x^2-2$ の接線は

$$y = 2\alpha(x-\alpha) + \alpha^2 - 2.$$

で, x 軸との交わりは

$$x - \alpha = \frac{1}{2\alpha}(2-\alpha^2) = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\alpha$$

から

$$x = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{\alpha}$$

となります

$$x_0 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

によって 帰納的 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ が定義できます.
帰納的に $x_n > 0$ $(n=0,1,2,\cdots)$ が示せますから

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot x_n + \frac{1}{x_n} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{2}x_n\cdot\frac{1}{x_n}} = \sqrt{2}.$$

から (i) $\{x_n\}$ は下に有界です. また

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{2}\cdot x_n = \frac{2-x_n^2}{2x_n} \geqq 0$$

から $x_{n+1} \geqq x_n$ が分かります. 従って (ii) $\{x_n\}$ は単調減少であることが示されました. (i), (ii) から $\{x_n\}$ はある実数 x に収束します

(2

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{x_n}$$

において $n \to +\infty$ とすると

$$x = \frac{1}{2} x + \frac{1}{x}$$

すなわち $x^2 - 2 = 0$ が従います. $x_n \geqq \sqrt{2}$ から

$$x \geqq \sqrt{2} > 0$$

から $x = \sqrt{2}$ が分かります