

Lec 07, 2020 年 6 月 17 日演習問題

I 関数 $y = te^{-t}$ の増減表を凹凸を含めて求めましょう。

(解答) 関数 $y = te^{-t}$ の導関数は

$$\begin{aligned} y' &= (t)'e^{-t} + t(e^{-t})' = 1 \cdot e^{-t} + t(-e^{-t}) \\ &= e^{-t}(1-t) \\ y'' &= -e^{-t}(1-t) + e^{-t}(-1) \\ &= e^{-t}(t-2) \end{aligned}$$

と求まります。 $e^{-t} > 0$ が常に成立しますから

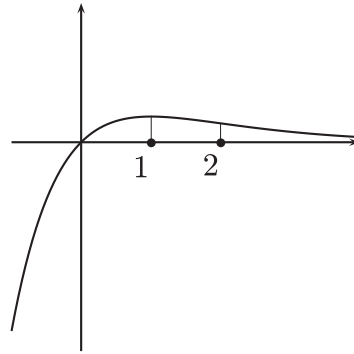
$$y' \geq 0 \iff 1-t \geq 0 \iff t \leq 1$$

$$y'' \geq 0 \iff t-2 \geq 0 \iff t \geq 2$$

が分ります。このことから関数 $y = te^{-t}$ の増減表は

t		1		2	
y'	+	0	-	-	-
y''	-	-	-	0	+
y	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{2}{e^2}$	↘

となります。



$t \rightarrow +\infty$ のとき

$$y = \frac{t}{e^t} \rightarrow 0$$

は基本的な事実です。また $t \rightarrow -\infty$ のとき $-t \rightarrow +\infty$ ですから

$$e^{-t} \rightarrow +\infty$$

となり、従って

$$te^{-t} \rightarrow -\infty$$

となります。以上からグラフは右上図のようになります。(技術的な都合上極大点 $(1, \frac{1}{e})$ および変曲点 $(2, \frac{2}{e^2})$ の y 座標は描いていません。)

II 関数 $y = t \log t$ の増減表を求めましょう。

(解答) 関数 $y = t \log t$ の微分を求めると

$$y' = \log t + 1, \quad y'' = \frac{1}{t} > 0$$

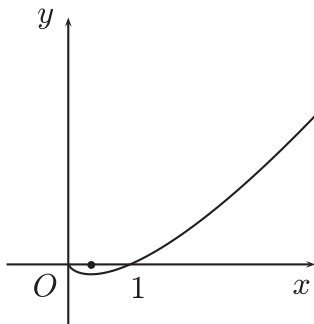
となります。 y' の符号は

$$y' \geq 0 \iff \log t \geq -1 \iff t \geq e^{-1} = \frac{1}{e}$$

となります。従って、増減表は

t		$\frac{1}{e}$	
y'	-	0	+
y''	+	+	+
y	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

となります。



$t \rightarrow +\infty$ のとき $\log t \rightarrow +\infty$ ですから

$$y = t \log t \rightarrow +\infty$$

となります。また $t \rightarrow +0$ のとき $s = -\log t \rightarrow +\infty$ となりますから

$$y = t \log t = e^{-s}(-s) = -\frac{s}{e^s} \rightarrow 0$$

となります。以上からグラフは左図のようになります。(技術的な都合上極小点 $(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$ 座標は描いていません。)

III 関数 $y = \frac{1}{x^2+1}$ の増減表を求めましょう。

(解答) まず関数の導関数を求めると

$$y' = -\frac{2t}{(t^2+1)^2}$$

$$y'' = -2 \frac{1 \cdot (t^2+1)^2 - t \cdot 2(t^2+1) \cdot 2t}{(t^2+1)^4}$$

$$= \frac{6(t^2 - \frac{1}{3})}{(t^2+1)^3}$$

を得ます。 $t^2+1 > 0$ から

$$y' \geq 0 \iff t \leq 0$$

$$y'' \geq 0 \iff t^2 \geq \frac{1}{3} \iff \left\{ \begin{array}{l} t < -\frac{1}{\sqrt{3}}, t > \frac{1}{\sqrt{3}} \\ t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right\}$$

となりますから、増減表は以下のようになります。

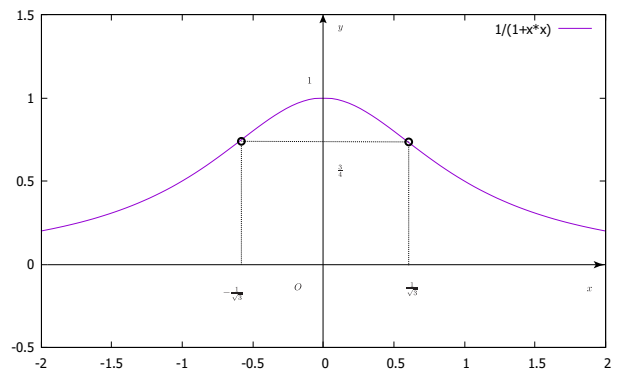
t		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
y'	+	+	+	0	-	-	-
y''	+	0	-	-	-	0	+
y	↗	$\frac{3}{4}$	↘	1	↘	$\frac{3}{4}$	↗

となります。

さらに $t \rightarrow \pm\infty$ のとき $\frac{1}{t^2} \rightarrow 0$ となりますから

$$y = \frac{1}{1+t^2} = \frac{\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}} \rightarrow \frac{0}{1+0} = 0$$

となります。以上からグラフは以下のようになります。(技術的な問題から変曲点 $(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$, 極大点 $(0, 1)$ の座標は描いていません。)



IV 関数 $y = t^2 e^t$ の増減表を求めましょう。

(解答) 関数 $y = t^2 e^t$ の微分を求めると

$$y' = 2t \cdot e^t + t^2 e^t = t(t+2)e^t$$

$$y'' = (2t+2)e^t + t(t+2)e^t = (t^2+4t+2)e^t$$

$$= \{t - (-2 + \sqrt{2})\} \cdot \{t - (-2 - \sqrt{2})\} e^t$$

となります。 $e^t > 0$ が常に成立しますから

$$y' \geq 0 \Leftrightarrow t(t+2) \geq 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t < -2, t > 0 \\ t = -2, 0 \\ -2 < t < 0 \end{array} \right\}$$

$$y'' \geq 0 \Leftrightarrow \{t - (-2 + \sqrt{2})\} \cdot \{t - (-2 - \sqrt{2})\} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t < -2 - \sqrt{2}, t > -2 + \sqrt{2} \\ t = -2 \pm \sqrt{2} \\ -2 - \sqrt{2} < t < -2 + \sqrt{2} \end{array} \right\}$$

と y' および y'' の符号が別れますから、以上で増減表は下図となります。

さらに $t \rightarrow +\infty$ のとき $t^2 \rightarrow +\infty, e^t \rightarrow +\infty$ から

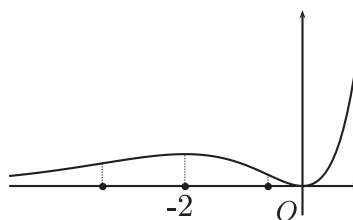
$$y = t^2 e^t \rightarrow +\infty$$

	$-2 - \sqrt{2}$		-2		$-2 + \sqrt{2}$		0	
$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
\uparrow	$(6 + 4\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}$	\rightarrow	$4e^{-2}$	\downarrow	$(6 - 4\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}$	\hookrightarrow	0	\uparrow

が従います。また $t \rightarrow -\infty$ のとき $s = -t \rightarrow +\infty$ ですから

$$y = (-s)^2 e^{-s} = \frac{s^2}{e^s} \rightarrow 0$$

が従います。以上からグラフは下図となります。(技術的な問題から極大点, 極小点, 変曲点の座標の全ては記述していません。)



V 関数 $y = \frac{\log t}{t}$ の増減表を求めましょう。

(解答) 関数 $y = \frac{\log t}{t}$ の導関数を求めると

$$y' = \frac{(\log t)'t - \log t \cdot (t)'}{t^2} = \frac{1 - \log t}{t^2}$$

$$y'' = \frac{-\frac{1}{t} \cdot t^2 - 2t(1 - \log t)}{t^4} = \frac{2 \log t - 3}{t^3}$$

となりますから、 y' および y'' の符号は

$$y' \geq 0 \Leftrightarrow \log t \leq 1 \Leftrightarrow t \leq e$$

$$y'' \geq 0 \Leftrightarrow \log t \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow t \geq e^{\frac{3}{2}}$$

となります。以上から増減表は

t		e		$e^{\frac{3}{2}}$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	\rightarrow	$\frac{1}{e}$	\downarrow	$\frac{3}{2e\sqrt{e}}$	\hookrightarrow

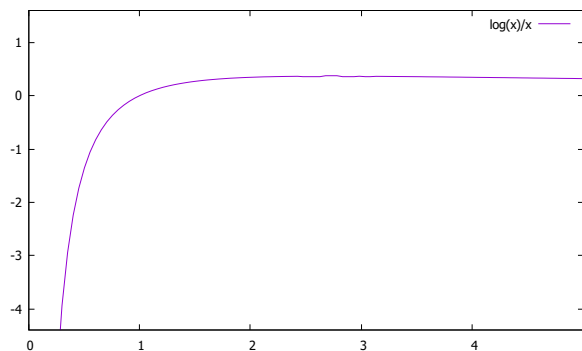
となります。さらに $t \rightarrow +\infty$ のとき $s = \log t \rightarrow +\infty$ が成立しますから

$$y = \frac{\log t}{t} = \frac{s}{e^s} \rightarrow 0$$

が従います。また $t \rightarrow +0$ のとき $\frac{1}{t} \rightarrow +\infty$ および $\log t \rightarrow -\infty$ が成立しますから

$$y = \frac{\log t}{t} \rightarrow -\infty$$

が従います。



VI 関数 $y = \frac{t}{t^2+1}$ に対して増減表を求めましょう。

(解答)

$$y' = \frac{(t)'(t^2+1) - t(t^2+1)'}{(t^2+1)^2} = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(1-t^2)'(t^2+1)^2 - (1-t^2) \cdot 2(t^2+1) \cdot 2t}{(t^2+1)^4} \\ &= \frac{-2t(t^2+1) + 4t(t^2-1)}{(t^2+1)^3} \\ &= \frac{2t(t^2-3)}{(t^2+1)^3} \end{aligned}$$

となります。 $1+t^2 > 0$ ですから y' および y'' の符号は

$$y' \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \Leftrightarrow 1-t^2 \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < t < 1 \\ t = \pm 1 \\ t < -1, t > 1 \end{cases}$$

$$y'' \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \Leftrightarrow t(t^2-3) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} < t < 0, t > \sqrt{3} \\ t = 0, \pm\sqrt{3} \\ t < -\sqrt{3}, 0 < t < \sqrt{3} \end{cases}$$

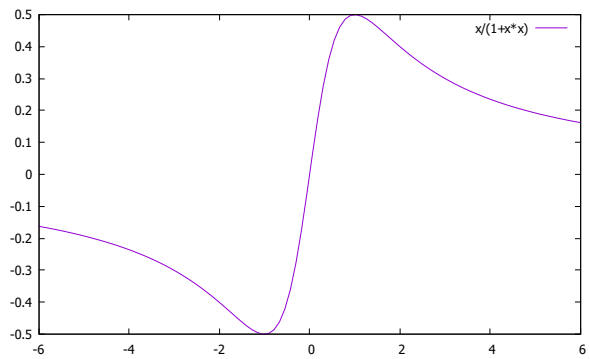
t		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
y'	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
y''	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
y	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘

となります。以上から増減表は下図となります。

さらに $t \rightarrow +\infty$ のとき $\frac{1}{t} \rightarrow 0$ となりますから

$$y = \frac{\frac{1}{t}}{1 + \frac{1}{t^2}} \rightarrow \frac{0}{1+0} = 0$$

が従います。



VII 関数 $y = \frac{1}{x} + \log x$ の増減表を凹凸を含めて求めましょう。

(解答) 導関数を求めると

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2} \\ y'' &= \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{2-x}{x^3} \end{aligned}$$

となります。 $x > 0$ が定義域ですから

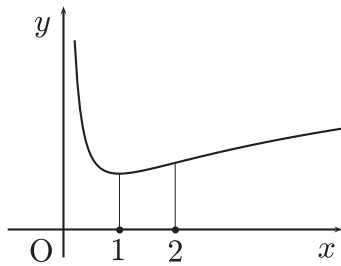
$$\begin{aligned} y' \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 &\Leftrightarrow x-1 \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \\ &\Leftrightarrow x \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 &\Leftrightarrow 2-x \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \\ &\Leftrightarrow t \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 2 \end{aligned}$$

が分ります。このことから関数 $y = \frac{1}{x} + \log x$ の増減表は

t		1		2	
y'	-	0	+	+	+
y''	+	+	+	0	-
y	↘	1	↗	$\frac{1}{2} + \log 2$	↗

となります。



さらに $x \rightarrow +\infty$ のとき

$$\frac{1}{x} + \log x \rightarrow 0 + \infty = +\infty$$

VIII $y = t^2 \log t$ に対して凹凸を含めて増減表を求めましょう。

(解答) 関数 $y = t^2 \log t$ の導関数と2階の導関数を求めると

$$\begin{aligned} y' &= (t^2)' \log t + t^2 (\log t)' \\ &= 2t \log t + t^2 \cdot \frac{1}{t} \\ &= 2t \log t + t = 2t \left(\log t + \frac{1}{2} \right) \\ y'' &= (2t)' \left(\log t + \frac{1}{2} \right) + 2t \cdot \left(\log t + \frac{1}{2} \right)' \\ &= 2 \left(\log t + \frac{1}{2} \right) + 2t \cdot \frac{1}{t} \\ &= 2 \left(\log t + \frac{1}{2} \right) + 2 = 2 \left(\log t + \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

を得ます。これから

$$\begin{aligned} y' \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 &\iff \log t + \frac{1}{2} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \\ &\iff \log t \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} -\frac{1}{2} \\ &\iff t \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 &\iff \log t + \frac{3}{2} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \\ &\iff \log t \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} -\frac{3}{2} \\ &\iff t \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} e^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となります。他方、 $x \rightarrow +0$ のときは、 $t = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ であることを用いると

$$\frac{1}{x} + \log x = t - \log t = t \left(1 - \frac{\log t}{t} \right) \rightarrow +\infty \cdot (1 - 0) = +\infty$$

であることが分かります。以上からグラフは右上図になります。(技術的な理由から、極小点と変曲点の座標を記入していません。)

が分かり、次の増減表を得ます。

t		$e^{-\frac{3}{2}}$		$e^{-\frac{1}{2}}$	
y'	-	-	-	0	+
y''	-	0	+	+	+
y	↖	$-\frac{3}{2e^3}$	↗	$-\frac{1}{2e}$	↘

さらに $t \rightarrow +\infty$ のとき $t^2 \rightarrow +\infty$, $\log t \rightarrow +\infty$ なので

$$y = t^2 \cdot \log t \rightarrow +\infty$$

となります。また $t \rightarrow +0$ のとき $s = -\log t \rightarrow +\infty$ ですから

$$y = t^2 \log t = e^{-2s}(-s) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{e^{2s}} \rightarrow -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

となります。

