0.1 Taylor の定理

2020 年 6 月 24 日演習問題解答

I 極限

$$\lim_{t\to 0}\frac{\log(t+1)-t}{t^2}$$

を求めましょう。Cauchy の平均値の定理を用いましょう.

（解答） $F(t)=\log(t+1)-t$, $G(t)=t^2$ とすると $F(0)=G(0)=0$ が成立します。従って Cauchy の平均値の定理を用いると

$$\frac{F(t)}{G(t)}=\frac{F(t)-F(0)}{G(t)-G(0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

を満たす ξ が 0 と t の間に存在します。ここで

$$F'(t)=\frac{1}{t+1}-1,\ G'(t)=2t$$

から $F'(0)=G'(0)=0$ が成立します。従って Cauchy の平均値の定理を用いると

$$\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{F'(\xi)-F'(0)}{G'(\xi)-G'(0)}=\frac{F''(\eta)}{G''(\eta)}=-\frac{1}{2(1+\eta)^2}$$

を満たす η が 0 と ξ の間に存在します。$t\to 0$ のとき $\xi\to 0$ となり、さらに $\eta\to 0$ が従います。このとき

$$-\frac{1}{2(1+\eta)^2}\to -\frac{1}{2}$$

となります。以上で

$$\frac{\log(1+t)-t}{t^2}\to -\frac{1}{2}$$

が示されました。

II 関数

$$f(t)=\log(1+t)$$

に対して高次の導関数 $f^{(n)}(t)$ を求めましょう.

（解答）

$$f'(t)=\frac{1}{1+t},\ f''(t)=-\frac{1}{(1+t)^2},\ f^{(3)}(t)=\frac{2}{(1+t)^3},\ f^{(4)}(t)=-\frac{2\cdot 3}{(1+t)^4}$$

から

$$f^{(n)}(t)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(t+1)^n} \tag{13}$$

と予想できる．この式を微分すると

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= (-1)^{n-1}(-n)\frac{(n-1)!}{(t+1)^{n+1}} \\ &= (-1)^n \frac{n!}{(t+1)^{n+1}} \\ &= (-1)^{n+1-1}\frac{(n+1-1)!}{(t+1)^{n+1}} \end{aligned}$$

となるので (13) が番号が 1 個ずれた $n+1$ で成立することが分かる．よって数学的帰納法によって (13) がすべての自然数 $n \in \mathbf{N}$ に対して成立することが示された．

III 関数

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

に対して高次の導関数 $f^{(n)}(t)$ を求めましょう．

（解答）

$$f'(t) = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}},\ f''(t) = \frac{3}{2^2}t^{-\frac{5}{2}},\ f^{(3)}(t) = -\frac{3\cdot 5}{2^3}t^{-\frac{5}{2}},\ f^{(4)}(t) = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^4}t^{-\frac{7}{2}}$$

から

$$f^{(n)}(t) = (-1)^{n-1}\frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}t^{-n-\frac{1}{2}} \tag{14}$$

と予想できる．この式を微分すると

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= (-1)^{n-1}\left(-n-\frac{1}{2}\right)\frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}t^{-n-\frac{1}{2}-1} \\ &= (-1)^n\frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2^{n+1}}t^{-n-1-\frac{1}{2}} \\ &= (-1)^{n+1-1}\frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)(2(n+1)-1)}{2^{n+1}}t^{-(n+1)-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となるので (14) が番号が 1 個ずれた $n+1$ で成立することが分かる．よって数学的帰納法によって (14) がすべての自然数 $n \in \mathbf{N}$ に対して成立することが示された．

IV 関数

$$f(t) = \frac{1}{t+1}$$

に対して高次の導関数 $f^{(n)}(t)$ を求めましょう．

（解答）

$$f'(t) = -\frac{1}{(t+1)^2},\quad f''(t) = \frac{2}{(t+1)^3},\quad f^{(3)}(t) = -\frac{2\cdot 3}{(t+1)^4},\quad f^{(4)}(t) = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(t+1)^5}$$

から

$$f^{(n)}(t) = (-1)^n \frac{n!}{(t+1)^{n+1}}$$

と推測できます．これを微分すると

$$f^{(n+1)}(t) = (-1)^n n! \frac{-(n+1)}{(t+1)^{n+2}} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{(t+1)^{n+2}}$$

から数学的帰納法によって推測が正しいことが分かります．

V 関数

$$f(t) = \frac{1}{1+t}$$

に対して $b = t$, $a = 0$ の場合に 2 階の Taylor の定理を適用しましょう．

（解答）

$$f'(t) = -\frac{(t+1)^2}{,} \quad f''(t) = \frac{2}{(t+1)^2},$$

から

$$f(0) = 1, f'(0) = -1$$

が分かります．Taylor の定理から

$$f(t) = f(0) + f'(0)(t-0) + \frac{1}{2} f''(c)(t-0)^2$$

が t と 0 の間の c に対して成立します．すなわち

$$\frac{1}{t+1} = 1 - t + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(c+1)^2} t^2 = 1 - t + \frac{1}{(c+1)^2} t^2$$

が t と 0 の間の c に対して成立します．

VI 極限

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\log t}{t}$$

を求めましょう．

（解答） $s = \log t$ とおくと $t \to +\infty$ のとき $s \to +\infty$ となります．このとき

$$\frac{\log t}{t} = \frac{s}{e^s} \to 0 \quad (s \to +\infty)$$

であることが分かります．