2020 年 7 月 1 日演習問題解答

I 関数

$$f(t) = \log(1+t)$$

に対して $t=0$ において Taylor の定理を $n=4$ で適用しましょう．

（解答）

$$f'(t) = \frac{1}{1+t},\ f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2},\ f^{(3)}(t) = \frac{2}{(1+t)^3},\ f^{(4)}(t) = -\frac{3!}{(1+t)^4},$$

から

$$f(0) = \log 1 = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = -1,\ f^{(3)}(0) = 2$$

となります．4 階の Taylor の定理から $t \neq 0$ のとき

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(0)t^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)t^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(c)t^4$$

すなわち

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}\cdot t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+c)^4}t^4$$

を満たす c が 0 と t の間に存在する．

II 関数

$$f(t) = \frac{1}{1+t}$$

に対して $t=0$ において Taylor の定理を $n=4$ で適用しましょう．

（解答）

$$f'(t) = -\frac{1}{(1+t)^2},\ f''(t) = \frac{2}{(1+t)^3},\ f^{(3)}(t) = -\frac{3!}{(1+t)^4},\ f^{(4)}(t) = \frac{4!}{(1+t)^5},$$

から

$$f(0) = 1,\ f'(0) = -1,\ f''(0) = 2,\ f^{(3)(0)} = -3!$$

を得るので，4 階の Taylor の定理から $t \neq 0$ のとき

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(0)t^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)t^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(c)t^4$$

すなわち

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \frac{1}{(1+c)^5}t^4$$

を満たす c が 0 と t の間に存在する．

III 関数 $f(t) = te^t$ に対して高次の導関数 $f^{(n)}(t)$ を求めましょう．

（解答）

$$f'(t) = 1 \cdot e^t + t \cdot e^t = (t+1)e^t,\ f''(t) = 1 \cdot e^t + (t+1) \cdot e^t = (t+2)e^t,$$
$$f^{(3)}(t) = 1 \cdot e^t + (t+2) \cdot e^t = (t+3)e^t$$

から

$$f^{(n)}(t) = (t+n)e^t \tag{15}$$

と推測できる．実際 (15) を微分して

$$f^{(n+1)} = 1 \cdot e^t + (t+n) \cdot e^t = (t+n+1)e^t$$

と (15) の n を $n+1$ にずらした結果となるので，数学的帰納法によって (15) がすべての $n \in \mathbf{N}$ に対して成立することが示された．

IV Taylor の定理を用いて不等式

$$e^t > 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 \quad (t \neq 0)$$

を示しましょう．

（解答）

$$f'(t) = f''(t) = f^{(3)}(t) = f^{(4)}(t) = e^t$$

から

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 1$$

が分かる．4 階の Taylor の定理より $t \neq 0$ のとき

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2}t^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}t^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}t^4$$

すなわち

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}e^c t^4$$

を満たす c が 0 と t の間に存在する．ここで $t \neq 0$ であることから，4 階の剰余項について

$$\frac{1}{4!}e^c t^4 > 0$$

であることが従うので

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}e^c t^4 > 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3$$

が成立する．

V(1) $f(t) = \sqrt{1+t}$ に対して $f'(t)$、$f''(t)$、$f^{(3)}(t)$ を求めましょう．
(2) $t > 0$ のとき不等式

$$1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 < \sqrt{1+t} < 1 + \frac{1}{2}t$$

が成立することを示しましょう．ただし Taylor の定理を用いましょう．

（解答）(1)

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t}} \\ f''(t) &= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(1+t)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+t)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+t)\sqrt{1+t}} \\ f^{(3)}(t) &= -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{(1+t)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{(1+t)^2\sqrt{1+t}} \end{aligned}$$

(2) (1) を用いると

$$f(0) = 1,\ f'(0) = \frac{1}{2},\ f''(0) = -\frac{1}{4}$$

が成立します．2 階の Taylor の定理を用いると

$$\begin{aligned} \sqrt{1+t} = f(t) &= f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(c_1)t^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(1+c_1)\sqrt{1+c_1}}\cdot t^2 \end{aligned}$$

を満たす c_1 が存在して $0 < c_1 < t$ を満たします．ここで

$$-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(1+c_1)\sqrt{1+c_1}}\cdot t^2 < 0$$

から

$$\sqrt{1+t} < 1 + \frac{1}{2}t$$

が従います．他方、3 階の Taylor の定理を用いると

$$\begin{aligned} \sqrt{1+t} = f(t) &= f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(0)t^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(c_2)t^3 \\ &= 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}\cdot t^2 + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{(1+c_2)^2\sqrt{1+c_2}}\cdot t^3 \end{aligned}$$

を満たす c_2 が存在して $0 < c_2 < t$ を満たします．このとき

$$\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{(1+c_2)^2\sqrt{1+c_2}}\cdot t^3 > 0$$

から

$$\sqrt{1+t} > 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2$$

が従います．

VI 不等式

$$t - \frac{t^2}{2} < \log(1+t) < t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} \quad (t > 0)$$

を示しましょう．

（解答）$f(t) = \log(1+t)$ とすると

$$f'(t) = \frac{1}{t+1},\ f''(t) = -\frac{1}{(t+1)^2},\ f^{(3)}(t) = \frac{2}{(t+1)^3},\ f^{(4)}(t) = -\frac{3!}{(t+1)^3}$$

から

$$f(0) = \log 1 = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = -1,\ f^{(3)}(0) = 2,$$

となる．f に $t = 0$ における 3 階の Taykor の定理を適用すると

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(0)t^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(c_1)t^3$$

すなわち

$$\begin{aligned}\log(1+t) &= t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}\cdot\frac{2}{(1+c_1)^3}t^3 \\ &= t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+c_1)^3}t^3\end{aligned}$$

を満たす c_1 が 0 と t の間に存在します．いま $t > 0$ の場合を考えていますから

$$0 < c_1 < t$$

となることに注意しましょう．このとき $1 + c_1 > 0$, $t^3 > 0$ であることから 3 階の剰余項は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+c_1)^3}t^3 > 0$$

と評価されます．従って

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+c)^3}t^3 > t - \frac{1}{2}t^2$$

が成立することが分かる．

他方 $t = 0$ における 4 階の Taylor の定理を適用すると

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(0)t^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)t^3\frac{1}{4!}f^{(4)}(c_2)t^4$$

すなわち

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}\cdot 2t^2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{3!}{(1+c_2)^4}t^3 = t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+c_2)^3}t^4$$

を満たす c_2 が 0 と t の間に存在します．いま $t > 0$ の場合を考えていますから $0 < c_2 < t$ となることに注意しましょう．このとき $1 + c_2 > 0$, $t^4 > 0$ であることから 4 階の剰余項は

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+c_2)^3}t^4 < 0$$

と評価されます（実は，この評価には $t > 0$ を使いません）[*2]．従って

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+c_2)^4}t^4 < t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3$$

が成立することが分かる．

[*2] $-1 < t < 0$ の場合は $-1 < t < c_2 < 0$ となりますから，$1 + c_2 > 0$ であることが分かります．