L02, 2020 年 10 月 14 日演習問題解答

I 次の曲面の P_0 における接平面を求めましょう。

(1) $z = xy - 2x + 2y - 1$ at $\mathrm{P}_0(0, 0, -1)$

(2) $z = \frac{x}{x+y}$ at $\mathrm{P}_0(1, -2, -1)$

(3) $z = x^2 - xy + 2y^2$ at $\mathrm{P}_0(2, 1, 4)$

(4) $z = \frac{y}{1+x^2}$ at $\mathrm{P}_0(0, 0, 0)$

(2) と (4) では 1 変数の微分の公式

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}$$

を用いましょう。

解答 (1)

$$z_x = y - 2, \quad z_y = Fx + 2$$

から

$$z_x(0, 0) = -2, \quad z_y(0, 0) = 2$$

となります．よって $\mathrm{P}_0(0, 0, -1)$ における接平面は

$$z = -2x + 2y - 1$$

であることが分かります.

(2)

$$z_x = \frac{1 \cdot (x+y) - x \cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2}, \quad z_y = \frac{-x}{(x+y)^2}$$

から

$$z_x(1, -2) = -2, \quad z_y(1, -2) = -1$$

となります．よって $\mathrm{P}_0(1, -2, -1)$ における接平面は

$$z = -2(x - 1) - (y + 2) - 1$$

であることが分かります.

(3)

$$z_x = 2x - y, \quad z_y = -x + 4y$$

から

$$z_x(2, 1) = 3, \quad z_y(2, 1) = 2$$

となります．よって $\mathrm{P}_0(2, 1, 4)$ における接平面は

$$z = 3(x - 2) + 2(y - 1) + 4$$

であることが分かります.

(4)

$$z_x = -\frac{y(2x)}{(1+x^2)^2} = -\frac{2xy}{(1+x^2)^2}, \quad z_y = \frac{1}{1+x^2}$$

から

$$z_x(0, 0) = 0, \quad z_y(0, 0) = 1$$

となります．よって $\mathrm{P}_0(0, 0, 0)$ における接平面は

$$z = y$$

であることが分かります.

II 以下の曲線 $g(x, y) = 0$ の P_0 における接線を求めましょう.

(1) $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1 = 0$ at $P_0(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$

(2) $g(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} - 1 = 0$ at $P_0(1, 1)$

(3) $g(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ at $P_0(0, 1)$

解答 **(1)** $g_x = 2x,\ g_y = 8y$ から

$$g_x(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}) = \sqrt{2}, \quad g_y(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}$$

と計算されます．従って $\mathrm{P}_0(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ における接線は

$$\sqrt{2}(x - \frac{1}{\sqrt{2}}) + 2\sqrt{2}(y - \frac{1}{2\sqrt{2}}) = 0$$

となります．

(2) $g_x = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}},\ g_y = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$ から

$$g_x(1,1) = \frac{1}{3}, \quad g_y(1,1) = \frac{1}{3}$$

となりますから，$\mathrm{P}_0(1,1)$ における接線は

$$\frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(y-1) = 0$$

となります．

(3) $g_x = 2x - y,\ g_y = -x + 2y$ から

$$g_x(0,1) = -1, \quad g_y(0,1) = 2$$

となりますから，$\mathrm{P}_0(1,1)$ における接線は

$$-1\cdot(x-0)+2(y-1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad -x+2(y-1) = 0$$

となります．

III 資本 K, 労働力 L の投入に対する生産関数

$$Q = F(K,L) = 9K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

を考えます．

(1) $K = 216$ and $L = 10^3$ に対する生産量 Q を求めましょう．

(2) $(K,L) = (216, 10^3)$ のときの資本の限界生産物 MPK と労働の限界生産物 MPL を求めて，$F(216, 998)$ と $F(217.5, 10^3)$ の近似値を求めましょう．

解答 計算のために $216 = 6^3$ に注意しましょう．このとき

$$Q = F(216, 10^3) = 9 \times \left(6^3\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(10^3\right)^{\frac{2}{3}} = 9 \times 6 \times 10^2 = 5400$$

であることが分かります．次に MPK と MPL を以下のように求めます．

$$F_K(K,L) = 3K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}, \quad F_L(K,L) = 6K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{1}{3}}$$

従って $K = 216 = 6^3$, $L = 10^3$ のとき

$$\begin{aligned} MPK = F_K(216, 10^3) &= 3\left(6^3\right)^{-\frac{2}{3}}\left(10^3\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= 3 \times \frac{1}{36} \times 10^2 = \frac{1}{12} \times 10^2 = 8.33\ldots \\ MPL = F_L(216, 10^3) &= 6 \times \left(6^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(10^3\right)^{-\frac{1}{3}} \\ &= 6 \times 6 \times 10^{-1} = 3.6 \end{aligned}$$

以上から $F_L(216, 10^3)$ を用いて $F(216, 998) = F(216, 10^3 - 2)$ の近似値を

$$\begin{aligned} F(216, 10^3 + 2) &\approx F(216, 10^3) + F_L(216, 10^3) \cdot (-2) \\ &= 5400 + 3.6 \times (-2) = 5392.8 \end{aligned}$$

と求めます．さらに $F_K(216, 10^3)$ を用いて $F(217.5, 10^3) = F(216 + 1.5, 10^3)$ の近似値を

$$\begin{aligned} F(216 + 1.5, 10^3) &\approx F(216, 10^3) + F_K(216, 10^3) \cdot 1.5 \\ &= 5400 + \frac{1}{12} \times 10^2 \times 1.5 = 5412.5 \end{aligned}$$

と求めます．

IV 次の 3 点 A, B, C を通る平面の方程式を求めましょう．
(1) A$(0, 0, 0)$, B$(1, 2, 3)$, C$(4, 5, 6)$
(2) A$(2, 0, 0)$, B$(0, 3, 0)$, C$(0, 0, 4)$
(3) A$(1, 2, 3)$, B$(-1, 1, 0)$, C$(2, -3, 5)$

解答以下では

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

に対して

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

と $\vec{p}$ と $\vec{q}$ の外積を定めると

$$(\vec{p}, \vec{p} \times \vec{q}) = (\vec{q}, \vec{p} \times \vec{q}) = 0$$

が成立することを用いています．

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から原点を通り法線ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるので，求める平面の方程式は

$$x - 2y + z = 0$$

であることが分かります．

(2)

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 0$$

は平面を表して，与えられた 3 点を通るので，これが求める方程式となります．

(3)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

から平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} -17 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$ であることが分かります．これから求める平面の方程式は

$$-17(x - 1 + (y - 2)) + 11(z - 3) = 0$$

となります．

V $g(x, y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$ をその上の点 $(2, \sqrt{3})$ の近傍で解いて

$$\varphi(x) = \sqrt{x^2 - 1} \tag{1}$$

とします．$\varphi'(2)$ を g の 1 階の偏微分係数を用いて求めましょう．

解答

$$g_x = 2x, \ g_y = -2y$$

と計算します．このとき

$$\varphi'(2) = -\frac{g_x(2,\sqrt{3})}{g_y(2,\sqrt{3})} = -\frac{4}{(-2\sqrt{3})} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

と計算されます.

XV Cobb-Douglas 型生産関数

$$Q = F(K,L) = 4K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}} \tag{2}$$

に対して $F(10^4+100, 625+(-15))$ の近似値を $K=10^4$, $L=625$ における MPK,MPL を用いて求めましょう．電卓でも計算してみましょう.

解答

$$F_K(K,L) = 3K^{-\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}}, \quad F_L(K,L) = K^{\frac{3}{4}}L^{-\frac{3}{4}}$$

から $K=10^4$, $L=625=5^4$ において MPK, MPL が

$$\begin{aligned} MPK &= F_K(10^4,5^4) = 3\times\left(10^4\right)^{-\frac{1}{4}}\times\left(5^4\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= 3\times 10^{-1}\times 5 = 1.5 \\ MPL &= F_L(10^4,5^4) = \left(10^4\right)^{\frac{3}{4}}\times\left(5^4\right)^{-\frac{3}{4}} \\ &= 10^3\times 5^{-3} = 8 \end{aligned}$$

と計算されます．さらに

$$F(10^4,5^4) = 4\times\left(10^4\right)^{\frac{3}{4}}\times\left(5^4\right)^{\frac{1}{4}} = 4\times 10^3\times 5 = 2.0\times 10^4$$

も計算できます．以上の準備の下で $F(10^4+100, 5^4+(-15))$ の近似値を求めると

$$\begin{aligned} F(10^4+100, 5^4+(-15)) &\approx F(10^4,5^4) + F_K(10^4,5^4)\times 100 + F_L(10^4,5^4)\times(-15) \\ &= 2.0\times 10^4 + 1.5\times 100 + 8\times(-15) \\ &= 20,030 \end{aligned}$$

となります．Google Chrome で計算してみると

$$F(10^4+100, 5^4+(-15)) = 20,027.81$$

となります.

VII ある工場が非熟練労働 x 時間，熟練労働 y 時間を使ってある生産物を

$$Q = F(x,y) = 60x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$$

単位生産していて，現在 $x=64$, $y=27$ となっているとします.

(1) 現在の生産量を求めましょう.

(2) どの方向に (x,y) を変化させれば Q が最も増加するでしょうか？

(3) 熟練労働を 1.5 時間増加させるが，生産レベルを保つとします．非熟練労働はどのように変化させることになるか近似値を求めましょう.

解答 **(1)** $64=4^3, 27=3^3$ に注意します．すると

$$F(64,27)=60\times\left(4^3\right)^{\frac{2}{3}}\times\left(3^3\right)^{\frac{1}{3}}=60\times4^2\times3=2,880$$

と現在の生産量が求められます．

(2)

$$F_x=60\times\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\times y^{\frac{1}{3}}=40\times x^{-\frac{1}{3}}\times y^{\frac{1}{3}}$$
$$F_x=60\times x^{\frac{2}{3}}\times\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}=20\times x^{\frac{2}{3}}\times y^{-\frac{2}{3}}$$

から

$$F_x(64,27)=40\times\left(4^3\right)^{-\frac{1}{3}}\times\left(3^3\right)^{\frac{1}{3}}=40\times\frac{1}{4}\times3=30$$
$$F_y(64,27)=20\times\left(4^3\right)^{\frac{2}{3}}\times\left(3^3\right)^{-\frac{2}{3}}=20\times4^2\times3^{-2}=\frac{320}{9}$$

と計算されます．これから

$$\nabla(F)(64,27)=\begin{pmatrix}30\\ \frac{320}{9}\end{pmatrix}$$

の方向が Q を最も増加させる方向です．

(3) 等量曲線

$$F(x,y)=F(64,27)$$

の $(x,y)=(64,27)$ における接線

$$30(x-64)+\frac{320}{9}(y-27)=0$$

上で近似的に考えます．熟練労働の時間を $y=27+1.5$ とすると

$$\begin{aligned}x-64&=-\frac{320}{9}\times\frac{1}{30}\times1.5\\&=-\frac{16}{9}=-1.77\ldots\end{aligned}$$

となりますから非熟練労働の時間を $1.77\ldots$ 時間減らすことになります．

VIII 曲線 $g(x,y):=x^2-xy+y^2-1$ を $(1,1)$ の近傍で解いた

$$y=\varphi(x)=\frac{x+\sqrt{4-3x^2}}{2}$$

に対して $\varphi'(1)$ を g の 1 階の偏微分係数を用いて求めましょう．

解答

$$g_x=2x-y,\quad g_y=-x+2y$$

となります．これから

$$\varphi'(1)=-\frac{g_x(1,1)}{g_y(1,1)}=-\frac{2-1}{-1+2}=-1$$

であることが分かります．

IX 第1財を x, 第2財を y 購入した時の効用が $u(x,y)=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$ となっている．$(x,y)=(1,1)$ における MRS を求めましょう．

解答

$$u_x(x,y)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}},\quad u_y(x,y)=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}$$

から

$$u_x(1,1)=\frac{1}{2},\quad u_y(1,1)=\frac{1}{3}$$

であるので，$(x,y)=(1,1)$ において

$$MRS=\frac{u_x(1,1)}{u_y(1,1)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

であることが分かる．

X $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ とします．平面

$$ax+by+cz+q=0$$

と点 (x_0,y_0,z_0) の距離 δ は

$$\delta=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+q|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

となることを示しましょう．

解答 $\mathrm{P}_0(x_0,y_0,z_0)$ を通り与えられた平面に垂直な直線上の点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ に対して

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

と $t\in\mathbf{R}$ を用いて表される．P が平面

$$ax+by+cz+q=0$$

上にあることから

$$a(x_0+ta)+b(y_0+bt)+c(z_0+ct)+q=0$$

が成立し，これから

$$t=-\frac{ax_0+by_0+cz_0+q}{a^2+b^2+c^2}$$

であることが従います．この値を t_0 と表すと P_0 と平面の距離 δ は

$$\begin{aligned}\delta&=\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}}=|t_0|\cdot\left\|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right\|\\&=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+q|}{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+q|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{aligned}$$

であることが分かります．