L03, 2020 年 10 月 21 日演習問題解答

I 以下の函数に対して 2 階の偏導関数 z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} を求めましょう．

(1) $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 8y$
(2) $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$
(3) $z = x^2 + xy - y^2 - 4x - 2y$
(4) $z = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y$
(5) $z = x^3 - xy - y^2$
(6) 削除
(7) $z = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$
(8) $z = x^3 + y^3 + 6xy$

(1)

$$\begin{cases} z_x &= 2x + y - 4 \\ z_y &= x + 2y - 8 \end{cases}$$

となります．

$$z_{xx} = 2,\ z_{xy} = z_{yx} = 1,\ z_{yy} = 2$$

と計算されます．

(2)

$$\begin{cases} z_x &= 3x^2 - 9y \\ z_y &= 3y^2 - 9x \end{cases}$$

となります．さらに

$$z_{xx} = 6x,\ z_{xy} = z_{yx} = -9,\ z_{yy} = 6y$$

となります．

(3)

$$\begin{cases} z_x &= 2x + y - 4 \\ z_y &= x - 2y - 2 \end{cases}$$

となります．さらに

$$z_{xx} = 2,\ z_{xy} = z_{yx} = 1,\ z_{yy} = -2$$

(4)

$$\begin{cases} z_x &= 2x + 4y - 6 \\ z_y &= 4x + 4y - 8 \end{cases}$$

となります．さらに

$$z_{xx} = 2,\ z_{xy} = z_{yx} = 4,\ z_{yy} = 4$$

と計算されます．

(5)

$$\begin{cases} z_x &= 3x^2 - y \\ z_y &= -x - 2y \end{cases}$$

となります．さらに

$$z_{xx} = 6x,\ z_{xy} = z_{yx} = -1,\ z_{yy} = -2$$

と計算されます．

(7) $f(x,y)$ の偏導関数は

$$f_x = 2(x^2 + y^2) \cdot 2x - 4x = 4x(x^2 + y^2 - 1)$$
$$f_y = 2(x^2 + y^2) \cdot 2y - 4x = 4y(x^2 + y^2 + 1)$$

と計算されます．さらに 2 階の偏導関数を計算すると

$$f_{xx} = 4(x^2 + y^2 - 1) + 4x \cdot 2x = 4(3x^2 + y^2 - 1)$$
$$f_{xy} = 8xy$$
$$f_{xy} = 4(x^2 + y^2 + 1) + 4y \cdot 2y = 4(x^2 + 3y^2 + 1)$$

となります．

(8)（コアテキストの 282 ページの例 8.18）
z の偏導関数は

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6y \\ z_y = 3y^2 + 6x \end{cases}$$

と計算されます．さらに

$$z_{xx} = 6x, z_{xy} = z_{yx} = 6, z_{yy} = 6y$$

となります．

II 曲線 $x^2+xy+y^2-x+2y=0$ が回転座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ によっていかなる式で表されるか考えましょう．

解答

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \end{cases}$$

から

$$x+y=\sqrt{2}X, \quad xy=\frac{1}{2}(X^2-Y^2)$$

となります．これから

$$\begin{aligned} &x^2+xy+y^2-x+2y \\ &=2X^2-\frac{1}{2}(X^2-Y^2) \\ &\qquad -\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \\ &=\frac{3}{2}X^2+\frac{1}{2}Y^2+\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{3}{\sqrt{2}}X \end{aligned}$$

III 曲線 $x^2+3xy+y^2-1=0$ が回転座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ によっていかなる式で表されるか考えましょう．

解答

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \end{cases}$$

から

$$x+y=\sqrt{2}X, \quad xy=\frac{1}{2}(X^2-Y^2)$$

となります．これから

$$\begin{aligned} x^2+3xy+y^2-1 &= 2X^2+\frac{1}{2}(X^2-Y^2)-1 \\ &=\frac{5}{2}X^2-\frac{1}{2}Y^2-1 \end{aligned}$$

となります．

IV (1) $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ に対して A^2 を求めましょう．
(2) (1) を用いて A^{-1} を求めましょう．

解答 (1)

$$A^2=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos^2\theta+\sin^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta+\cos\theta^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I_2$$

(2) 正則行列の定義から $A^{-1}=A$ として A が正則であることが分かります．

VI (1) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$${}^t(\vec{a}+\vec{b}) = {}^t\vec{a} + {}^t\vec{b}, \quad {}^t(\lambda\vec{a}) = \lambda({}^t\vec{a})$$

が成立することを示しましょう.

(2) 2 次正方行列 $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB, \quad {}^t(\lambda A) = \lambda({}^tA)$$

が成立することを示しましょう.

解答 (1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ に対して

$$\begin{aligned} {}^t(\vec{a}+\vec{b}) &= {}^t\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} \\ &= (a_1+b_1 \ \cdots \ a_n+b_n) \\ &= (a_1 \ \cdots \ a_n) + (b_1 \ \cdots \ b_n) \\ &= {}^t\vec{a} + {}^t\vec{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda\vec{a}) &= {}^t\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} \\ &= (\lambda a_1 \ \cdots \ \lambda a_n) \\ &= \lambda(a_1 \ \cdots \ a_n) \\ &= \lambda^t\vec{a} \end{aligned}$$

(2) $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2)$, $B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2)$, と列ベクトル表示します. このとき

$$\begin{aligned} {}^t(A+B) &= {}^t(\vec{a}_1+\vec{b}_1 \ \vec{a}_2+\vec{b}_2) \\ &= \begin{pmatrix} {}^t(\vec{a}_1+\vec{b}_1) \\ {}^t(\vec{a}_2+\vec{b}_2)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1+{}^t\vec{b}_1 \\ {}^t\vec{a}_2+{}^t\vec{b}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ {}^t\vec{a}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^t\vec{b}_1 \\ {}^t\vec{b}_2+ \end{pmatrix} \\ &= {}^tA + {}^tB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda A) &= {}^t(\lambda\vec{a}_1 \ \lambda\vec{a}_2) \\ &= \begin{pmatrix} {}^t(\lambda\vec{a}_1) \\ {}^t(\lambda\vec{a}_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^t\vec{a}_1 \\ \lambda^t\vec{a}_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1) \\ {}^t\vec{a}_2 \end{pmatrix} = \lambda^tA \end{aligned}$$

VII $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = \left(\vec{v}, {}^tA\vec{w}\right) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2)$$

が成立することを用いて

$${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$$

を導きましょう.

解答

$$\begin{aligned} (AB\vec{v}, \vec{w}) &= \left(\vec{v}, {}^t(AB)\vec{w}\right) \\ (AB\vec{v}, \vec{w}) &= \left(B\vec{v}, {}^tA\vec{w}\right) \\ &= \left(\vec{v}, {}^tB{}^tA\vec{w}\right) \end{aligned}$$

から任意の $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$\left(\vec{v}, {}^t(AB)\vec{w}\right) = \left(\vec{v}, {}^tB{}^tA\vec{w}\right)$$

が従います. このことから任意の $\vec{w} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$${}^t(AB)\vec{w} = {}^tB{}^tA\vec{w}$$

が成立することが従います. これから

$${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$$

であることが従います.

VIII 以下の行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して $B := \lambda I_2 - A$ が正則でない $\lambda \in \mathbf{R}$ を求めましょう.
(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **(3)** $\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **(4)** $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ **(5)** $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

解答 (1)

$$\begin{aligned} |B| &= \left|\begin{smallmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda+4 \end{smallmatrix}\right| \\ &= (\lambda-1)(\lambda+4) - (-2)(-3) \\ &= \lambda^2 + 3\lambda - 10 \\ &= (\lambda+5)(\lambda-2) \end{aligned}$$

から B が正則でないのは $\lambda = -5, 2$ のときである.

(2)

$$\begin{aligned} |B| &= \left|\begin{smallmatrix} \lambda+4 & 2 \\ -3 & \lambda-4 \end{smallmatrix}\right| \\ &= (\lambda+4)(\lambda-1) - 2(-3) \\ &= \lambda^2 + 3\lambda + 2 \\ &= (\lambda+1)(\lambda+2) \end{aligned}$$

から B が正則でないのは $\lambda = -1, -2$ のときである.

(2)

$$\begin{aligned} |B| &= \left|\begin{smallmatrix} \lambda-1 & -12 \\ -3 & \lambda-1 \end{smallmatrix}\right| \\ &= (\lambda-1)^2 - 3 \cdot 12 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 35 \\ &= (\lambda-7)(\lambda+5) \end{aligned}$$

から B が正則でないのは $\lambda = -5, 7$ のときである.

(4)

$$\begin{aligned} |B| &= \left|\begin{smallmatrix} \lambda-2 & -2 \\ -2 & \lambda-5 \end{smallmatrix}\right| \\ &= (\lambda-2)(\lambda-5) - (-2)^2 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 6 \\ &= (\lambda-1)(\lambda-5) \end{aligned}$$

から B が正則でないのは $\lambda = 1, 5$ のときである.

(5)

$$\begin{aligned} |B| &= \left|\begin{smallmatrix} \lambda+1 & -3 \\ -3 & \lambda-7 \end{smallmatrix}\right| \\ &= (\lambda+1)(\lambda-7) - (-3)^2 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda - 16 \\ &= (\lambda-8)(\lambda+2) \end{aligned}$$

から B が正則でないのは $\lambda = 2, 8$ のときである.

IX 以下の実対称行列 A が定める 2 次形式が正定値か負定値か判定しましょう.
(1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ **(2)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **(3)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$
(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ **(5)** $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$

解答 以下では A の成分を $A = (a_{ij})$ と表します.
(1) $|A| = -16 < 0$ なので A が定める 2 次形式は正定値でも負定値でもありません.
(2) $|A| = -3 < 0$ なので A が定める 2 次形式は正定値でも負定値でもありません.
(3) $|A| = -9 < 0 A$ が定める 2 次形式は正定値でも負定値でもありません.
(4) $|A| = -6 < 0 A$ が定める 2 次形式は正定値でも負定値でもありません.
(5) $|A| = 24 > 0,\ a_{11} = 3 > 0$ なので A が定める 2 次形式は正定値であることが分かります.

X f は $\mathbf{R}$ 上の微分可能な関数とします.
(1) $F(x,y) := f(x^2+y^2)$ と $\mathbf{R}^2$ 上の関数を定義します. $\nabla(F)(x,y)$ を求めましょう.
(2) $y \neq 0$ のとき $G(x,y) := f(\frac{x}{y})$ を定義します. $\nabla(G)(x,y)$ を求めましょう.

解答 (1)

$$F_x = f'(x^2+y^2)\cdot 2x$$
$$F_y = f'(x^2+y^2)\cdot 2y$$

から

$$\nabla(F)(x,y) = 2f'(x^2+y^2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(2)

$$G_x = f'(\frac{x}{y})\cdot\frac{1}{y}$$
$$G_y = f'(\frac{x}{y})\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

から

$$\nabla(G)(x,y) = f'(\frac{x}{y})\begin{pmatrix} \frac{1}{y} \\ -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{y^2}f'(\frac{x}{y})\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

XI (1) $f(x,y,z) = e^x + e^{2y} + e^{3z}$ とします. $\nabla(f)(0,0,0)$ を求めましょう. </dd>
(2) $g(x,y,z) = e^{x+2y+3z}$ とします. $\nabla(g)(0,0,0)$ を求めましょう.

解答 (1)

$$f_x = e^x$$
$$f_y = 2e^{2y}$$
$$f_z = 3e^{3z}$$

から

$$\nabla(f)(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2)

$$g_x = e^{x+2y+3z}$$
$$g_y = 2e^{x+2y+3z}$$
$$g_z = 3e^{x+2y+3z}$$

から

$$\nabla(g)(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

XII f の P_0 における $\vec{v}$ 方向の微分 $D_{\vec{v}}(f)(\mathrm{P}_0)$ を求めましょう.
(1) $f(x,y) = x+2y-1$ at $\mathrm{P}_0(1,2)$ in the direction $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
(2) $f(x,y) = x^2+2xy-y^3$ at $\mathrm{P}_0(1,1)$ in the direction $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

解答 (1)

$$f_x = 1, \quad f_y = 2$$

から

$$D_{\vec{v}}(f)(\mathrm{P}_0) = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 = 3$$

(2)

$$f_x = 2x+y, \quad f_y = x-3y^2$$

から

$$f_x(1,1) = 3, \quad f_y(1,1) = -2$$

となるので

$$D_{\vec{v}}(f)(\mathrm{P}_0) = 1\cdot 3 + 3\cdot(-2) = -3$$