

L04, 2020 年 10 月 28 日演習問題解答

I 以下の函数の停留点を求めて極大・極小を判定しましょう.

(1) $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 8y$

(2) $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$

(3) $z = x^2 + xy - y^2 - 4x - 2y$

(4) $z = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y$

(5) $z = x^3 - xy - y^2$

(6) $z = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$

(7) $z = x^3 + y^3 + 6xy$

解答 (1)

$$\begin{cases} z_x = 2x + y - 4 = 0 \\ z_y = x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式を使って解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{3} = 0, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{12}{3} = 4$$

となりますから, $(x, y) = (0, 4)$ が z の停留点であることが分かります. さらに

$$z_{xx} = 2, \quad z_{xy} = z_{yx} = 1, \quad z_{yy} = 2$$

と計算されるので

$$z_{xx} = 2 > 0, \quad \det(H(z)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$$

から $(x, y) = (0, 4)$ で z は極小であることが分かります.

注意 $z_{xx} > 0, \det(H(z)) > 0$ が \mathbf{R}^2 のすべての点で成立しますから

$$z(0, 4) < z(x, y) \quad ((x, y) \neq (0, 4))$$

が成立することが分かります.

注意 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$ とすれば

$$z = \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

と表現できます.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned} z &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) + \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \end{aligned}$$

と展開できます。ここで

$$\left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^t A \vec{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha} \right) = \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned} z &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + 2 \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \end{aligned}$$

となります。ここで

$$2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} A^{-1} \vec{b} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned} (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) &= -\frac{1}{2} (\vec{b}, \vec{\alpha}) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = -16 \end{aligned}$$

から

$$z = \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) - 16$$

となります。ここで

$$A \text{ の } (1,1) \text{ 成分} = 1 > 0, \quad |A| = \frac{3}{4} > 0$$

から A が定める 2 次形式は正定値であること、すなわち

$$\left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

であることが分かります。従って

$$\begin{aligned} z(X, Y) &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) - 16 \\ &> 0 - 16 = (A\vec{0}, \vec{0}) - 16 = Z(X=0, Y=0) \end{aligned}$$

が分かります。よって z の最小値は $X = Y = 0$ すなわち $(x, y) = (0, 4)$ のとき -16 であることが分かります。

(2)

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 9y = 0 \cdots (I) \\ z_y = 3y^2 - 9x = 0 \cdots (II) \end{cases}$$

を解きます。(I) から $y = \frac{1}{3}x^2$ となるので (II) から得られる $y^2 = 3x$ に代入して

$$\frac{1}{9}x^4 = 3x \quad \text{すなわち} \quad x^4 = 27x$$

を得ます。従って

$$x = 0 \quad \text{または} \quad x = 3$$

が必要です。

(a) $x = 0$ のとき, (I) から $y = 0$ となりますが、逆に $(x, y) = (0, 0)$ は (I) かつ (II) を満たします。

(b) $x = 3$ のとき, (I) から $y = 3$ となりますが、逆に $(x, y) = (3, 3)$ は (I) かつ (II) を満たします。

以上で z の停留点は $(x, y) = (0, 0), (3, 3)$ であることが分かりました。

さらに

$$z_{xx} = 6x, \quad z_{xy} = z_{yx} = -9, \quad z_{yy} = 6y$$

であることに注意すると

(a) $(x, y) = (0, 0)$ のとき,

$$\det H(z)(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{vmatrix} = -81 < 0$$

なりますから、 z は $(x, y) = (0, 0)$ で極大でも極小でもないことが分かります。

(b) $(x, y) = (3, 3)$ のとき,

$$z_{xx}(3, 3) = 18 > 0, \quad \det H(z)(3, 3) = \begin{vmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} = 9^2 \cdot 3 > 0 < 0$$

なりますから、 z は $(x, y) = (3, 3)$ で極小であることが分かります。

(3)

$$\begin{cases} z_x = 2x + y - 4 = 0 \\ z_y = x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式で解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-5} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-5} = 0$$

となりますから、 $(x, y) = (2, 0)$ が z の停留点であることが分かります。

さらに

$$z_{xx} = 2, \quad z_{xy} = z_{yx} = 1, \quad z_{yy} = -2$$

と計算されるので

$$\det(H(z)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 1^2 = -5 < 0 > 0$$

から $(x, y) = (2, 0)$ で z は極大でも極小でもないことが分かります。

(4)

$$\begin{cases} z_x = 2x + 4y - 6 = 0 \\ z_y = 4x + 4y - 8 = 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式で解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-8} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-8} = 1$$

から停留点は $(x, y) = (1, 1)$ となります。

さらに

$$z_{xx} = 2, \quad z_{xy} = z_{yx} = 4, \quad z_{yy} = 4$$

であるので

$$\det(H(z)) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -8 < 0$$

となるので $(x, y) = (1, 1)$ では極大でも極小でもないことが分かる。

(5)

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - y = 0 & (i) \\ z_y = -x - 2y = 0 & (ii) \end{cases}$$

を解きます。(ii) から $x = -2y$ となりますが、これを (i) に代入して

$$12y^2 - y = 0$$

を得ますが、これから $y = 0$ または $y = \frac{1}{12}$ であることが分かります。これを $x = -2y$ に代入して

$$\begin{array}{ll} y = 0 & \text{のとき} \quad x = 0 \\ y = \frac{1}{12} & \text{のとき} \quad x = -\frac{1}{6} \end{array}$$

となりますから、停留点は

$$(x, y) = (0, 0), \quad \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$$

であることが分かります。

さらに

$$z_{xx} = 6x, \quad z_{xy} = z_{yx} = -1, \quad z_{yy} = -2$$

であることを用いて、この2点の極大・極小を判定しましょう。

(a) $(x, y) = (0, 0)$ のとき

$$\det(H(z)(0, 0)) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

となりますから、 $(0, 0)$ では極大でも極小でもないことが分かります。

(b) $(x, y) = (-\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ のとき

$$\det(H(z)(-\frac{1}{6}, \frac{1}{12})) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad z_{xx}(-\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = -1 < 0$$

から, $(-\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ では極大であることが分かります.

(6) $f(x, y)$ の偏導関数は

$$\begin{aligned} f_x &= 2(x^2 + y^2) \cdot 2x - 4x = 4x(x^2 + y^2 - 1) \\ f_y &= 2(x^2 + y^2) \cdot 2y - 4x = 4y(x^2 + y^2 + 1) \end{aligned}$$

と計算されます。このことから

$$\begin{aligned} f_x = 0 &\Leftrightarrow (x = 0) \text{ OR } (x^2 + y^2 = 1) \\ f_y = 0 &\Leftrightarrow y = 0 \end{aligned}$$

が従いますので

$$\begin{aligned} f_x = f_y = 0 &\Leftrightarrow (x = y = 0) \text{ OR } (x^2 + y^2 = 1, \text{ AND } y = 0) \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0), (\pm 1, 0) \end{aligned}$$

が分かります。以上で f の停留点は $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$ の 3 点であることが示されました。

さらに 2 階の偏導関数を計算すると

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 4(x^2 + y^2 - 1) + 4x \cdot 2x = 4(3x^2 + y^2 - 1) \\ f_{xy} &= 8xy \\ f_{xy} &= 4(x^2 + y^2 + 1) + 4y \cdot 2y = 4(x^2 + 3y^2 + 1) \end{aligned}$$

となります。

(i) $(x, y) = (0, 0)$ において Hesse 行列式は

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

となりますから, $(0, 0)$ において f は極大でも極小でもありません。

(ii) $(x, y) = (\pm 1, 0)$ において Hesse 行列式は

$$\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 64 > 0$$

で, さらに $f_{xx}(\pm 1, 0) = 8 > 0$ も成立しますから, $(\pm 1, 0)$ において f は極小であることが分かります。

(7) (コアテキストの 282 ページの例 8.18)

z の偏導関数は

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6y = 0 \cdots (1) \\ z_y = 3y^2 + 6x = 0 \cdots (2) \end{cases}$$

と計算されます。(2) から $x = -\frac{1}{2}y^2$ を得ますが, これを (1) から得られる $y = -\frac{1}{2}x^2$ に代入すると

$$y = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}y^2 \right)^2 = -\frac{1}{8}y^4$$

が導かれます。従って

$$y(y^3 + 8) = 0$$

から $y = 0$ または $y = -2$ であることが必要条件であることが分かります。このとき

- (i) $y = 0$ のとき (2) に代入して $x = 0$
- (ii) $y = -2$ のとき (2) から $x = -2$ を得る。

を得ます。以上で停留点は

$$(x, y) = (0, 0) \text{ または } (-2, -2)$$

であることが示されました。

$$z_{xx} = 6x, z_{xy} = z_{yx} = 6, z_{yy} = 6y$$

から

$$D = \det(H(f)) = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = (6x)(6y) - 6^2 = 6^2(xy - 1)$$

となります。各停留点について、 D の符号を調べると以下のようになります。

- (i) $(0, 0)$ のとき $D = 6^2(-1) < 0$ から $(0, 0)$ では極大値、極小値を取りません。
- (ii) $(-2, -2)$ のとき $D = 6^2((-2)(-2) - 1) = 6^2 \cdot 3 > 0$

$$z_{xx}(-2, -2) = 6(-2) = -12 < 0$$

ですから $(-2, -2)$ で極大値をとることが分ります。

II $\alpha, \beta > 0, \rho > 0$ を定数として CES 関数を

$$Y = F(K, L) = (\alpha K^\rho + \beta L^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \quad (3)$$

と定義します。(1) $\log F(K, L)$ を K, L で微分して $F_K(K, L), F_L(K, L)$ を求めましょう。

(2) $F(K, L)$ が Euler の等式

$$K \cdot F_K(K, L) + L \cdot F_L(K, L) = F(K, L) \quad (4)$$

を満たすことを示しましょう。

解答 (1)

$$\log F(K, L) = \frac{1}{\sigma} \cdot \log(\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma)$$

の両辺を K, L で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{F_K(K, L)}{F(K, L)} &= \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\sigma \alpha K^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma} = \frac{\alpha K^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma} \\ \frac{F_L(K, L)}{F(K, L)} &= \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\sigma \beta L^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma} = \frac{\beta L^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma} \end{aligned}$$

となります。これから

$$F_K(K, L) = \frac{\alpha K^{\sigma-1}}{\alpha K^{\sigma} + \beta L^{\sigma}} \cdot F(K, L)$$

$$F_L(K, L) = \frac{\beta L^{\sigma-1}}{\alpha K^{\sigma} + \beta L^{\sigma}} \cdot F(K, L)$$

となります。

(2)(1)の最後の2式にそれぞれ K と L を掛けて加えると

$$K \cdot F_K(K, L) + L \cdot F_L(K, L) = \frac{\alpha K^{\sigma} + \beta L^{\sigma}}{\alpha K^{\sigma} + \beta L^{\sigma}} \cdot F(K, L) = F(K, L)$$

から $F(K, L)$ が Euler の等式を満たすことが分かります。

III $\alpha, \beta > 0, A > 0$ を定数として Cobb-Douglas 型関数

$$Y = F(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta} \quad (5)$$

と定義します。

(1) $F_{KK}, F_{KL}, F_{LK}, F_{LL}$ を求めましょう。

(2) 第1象限のすべての点 $(K, L) \in \mathbf{R}_{++}^2$ に対して

$$F_{KK}(K, L) < 0, \text{ かつ } \det(H(F)(K, L)) > 0 \quad (6)$$

を満たす α, β の条件を求めましょう。

解答 (1)

$$F_K(K, L) = \alpha \cdot AK^{\alpha-1}L^{\beta}, \quad F_L(K, L) = \beta \cdot AK^{\alpha}L^{\beta-1}$$

から

$$F_{KK}(K, L) = \alpha(\alpha-1) \cdot AK^{\alpha-2}L^{\beta}$$

$$F_{KL}(K, L) = \alpha\beta \cdot AK^{\alpha-1}L^{\beta-1}$$

$$F_{LK}(K, L) = \alpha\beta \cdot AK^{\alpha-1}L^{\beta-1}$$

$$F_{LL}(K, L) = \beta(\beta-1) \cdot AK^{\alpha}L^{\beta-2}$$

となります。一般論で成立することが分かっていますが、 $F_{KL} = F_{LK}$ に注意しましょう。

(2) $\alpha \cdot AK^{\alpha-2}L^{\beta} > 0$ から

$$F_{KK}(K, L) < 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$$

が分かります。次に

$$\begin{aligned} \det(H(F)(K, L)) &= F_{KK}(K, L) \cdot F_{LL}(K, L) - F_{KL}(K, L)^2 \\ &= \alpha(\alpha-1) \cdot AK^{\alpha-2}L^{\beta} \cdot \beta(\beta-1) \cdot AK^{\alpha}L^{\beta-2} - (\alpha\beta \cdot AK^{\alpha-1}L^{\beta-1})^2 \\ &= A^2K^{2\alpha-2}L^{2\beta-2} \{ \alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1) - \alpha^2\beta^2 \} \\ &= A^2K^{2\alpha-2}L^{2\beta-2} \alpha\beta(1-\alpha-\beta) \end{aligned}$$

となります. $= A^2 K^{2\alpha-2} L^{2\beta-2} > 0, \alpha\beta > 0$ から

$$\det(H(F)(K, L)) \Leftrightarrow \alpha + \beta < 1$$

が分かります. 以上で求める条件は

$$\alpha < 1, \quad \alpha + \beta < 1$$

であることが分かります. この条件は

$$\alpha < 1, \quad \beta < 1, \quad \alpha + \beta < 1$$

と必要十分であることにも注意しましょう.