L05, 2020 年 10 月 04 日演習問題解答

II (演習 7.8) 対称行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ が定める 2 次形式が正定値であるとします．このとき A は正則で，A^{-1} が対称となり，A^{-1} が定める 2 次形式も正定値となることを示しましょう．

A が定める 2 次形式が正定値ですから，

$$|A| > 0$$

が成立します．よって A は正則であることが分かります．

$$AA^{-1} = I_2$$

の両辺の転置をとると

$$^t\left(A^{-1}\right) {}^tA = {}^t\left(A^{-1}\right) A = I_2$$

が成立します．この両変に右から A^{-1} を掛けると

$$^t\left(A^{-1}\right) = A^{-1}$$

が従いますから，A^{-1} が対称であることが分かります．A の固有値 α, β は

$$\alpha, \beta > 0$$

となります．このとき回転行列 R が存在して

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

が成立します．この両辺の逆行列をとると

$$R^{-1}A^{-1}R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}$$

を得ます．

$$\Phi_{A^{-1}}(\lambda) = \Phi_{R^{-1}A^{-1}R} = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{\beta} \end{vmatrix} = (\lambda - \frac{1}{\alpha})(\lambda - \frac{1}{\beta})$$

から A^{-1} の固有値が $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} > 0$ と正となります．よって対称な A^{-1} が定める 2 次形式は正定値となります．

III 生産関数

$$f(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta} \quad (\alpha, \beta > 0)$$

を考えます．

(1) $\det(H(f))$, f_{xx} を計算しましょう．

(2) $\alpha + \beta \neq 1$ のとき，利潤関数

$$\pi(x, y) := pf(x, y) - qx - ry$$

の停留点を求めましょう．ここでは $p, q, r > 0$ とします．

(3) $\alpha + \beta < 1$ のとき利潤を最大化する (x, y) がただ一つ存在することを示しましょう．

解答 (1)

$$f_x = \alpha x^{\alpha-1} y^\beta$$
$$f_y = \beta x^\alpha y^{\beta-1}$$

から

$$f_{xx} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta$$
$$f_{xy} = f_{yx} = \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1}$$
$$f_{yy} = \beta(\beta-1)x^\alpha y^{\beta-2}$$

が分かります．これから

$$\begin{aligned}\det H(f) &= \begin{vmatrix} \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta & \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} \\ \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} & \beta(\beta-1)x^\alpha y^{\beta-2} \end{vmatrix} \\ &= x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2}\left(\alpha(\alpha-1)\beta(\beta-1)-\alpha^2\beta^2\right) \\ &= x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2}\alpha\beta\left((\alpha-1)(\beta-1)-\alpha\beta\right) \\ &- x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2}\alpha\beta(1-\alpha-\beta)\end{aligned}$$

となります．

(2) $\pi_x = \pi_y = 0$ すなわち

$$\begin{cases} p\alpha x^{\alpha-1}y^\beta - q = 0 & \ldots\ldots(1) \\ p\beta x^\alpha y^{\beta-1} - r = 0 & \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

を解きます．これは

$$\begin{cases} x^{\alpha-1}y^\beta = \frac{q}{p\alpha} & \ldots\ldots(1)' \\ x^\alpha y^{\beta-1} = \frac{r}{p\beta} & \ldots\ldots(2)' \end{cases}$$

と必要十分です．$(1)'/(2)'$ から

$$x^{-1}y = \frac{q}{r}\cdot\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{従って} \quad y = \frac{q}{r}\cdot\frac{\beta}{\alpha}x$$

となりますが，これを (1)' に代入すると

$$x^{\alpha-1}\left(\frac{q}{r}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta x^\beta = \frac{q}{p\alpha}$$

から

$$\begin{aligned}x^{\alpha+\beta-1} &= \frac{q}{p\alpha}\cdot\frac{r^\beta}{q^\beta}\cdot\frac{\alpha^\beta}{\beta^\beta} \\ &= \left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\beta-1}\left(\frac{r}{\beta}\right)^\beta\cdot\frac{1}{p}\end{aligned}$$

から

$$x = \left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}}\left(\frac{r}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}\cdot\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$$

同様に

$$y = \left(\frac{q}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}\left(\frac{r}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}}\cdot\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$$

となります．

(3) $\alpha+\beta<1$ のとき $\alpha,\beta>0$ から $\alpha,\beta<1$ が従いますから

$$\pi_{xx} = pf_{xx} = p\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta < 0$$

が常に成立します．さらに

$$\begin{aligned}\det(H(\pi)) &= \begin{vmatrix} pf_{xx} & pf_{xy} \\ pf_{yx} & pf_{yy} \end{vmatrix} \\ &= p^2\det(H(f)) \\ &= p^2\alpha\beta(1-\alpha-\beta)x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2} > 0\end{aligned}$$

となります．従って (2) で求めた停留点を (x_0, y_0) とすると

$$\pi(x,y) < \pi(x_0,y_0) \quad ((x,y)\in\mathbf{R}^2_{++},\ (x,y)\neq(x_0,y_0))$$

が成立します．

IV 生産関数 $f(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ に対する利潤関数

$$\pi(x,y)=pf(x,y)-qx-ry$$

を最大化して生産要素需要関数

$$x(p,q,r)=\frac{p^3}{27q^2r},\quad y(p,q,r)=\frac{p^3}{27qr^2}$$

を求めました．利潤関数

$$\Pi(p,q,r)=\pi(x(p,q,r),y(p,q,r))$$

生産物供給関数

$$z(p,q,r)=f(x(p,q,r),y(p,q,r))$$

を定義すると

$$z(p,q,r)=\frac{\partial\Pi}{\partial p},\quad x(p,q,r)=-\frac{\partial\Pi}{\partial q},\quad y(p,q,r)=-\frac{\partial\Pi}{\partial r}$$

が成立することを、具体的に両辺を計算することで示しましょう．

解答

$$\begin{aligned}\Pi(p,q,r)&=r\cdot\left(\frac{p^3}{27q^2r}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{p^3}{27qr^2}\right)^{\frac{1}{3}}-q\cdot\frac{p^3}{27q^2r}-r\cdot\frac{p^3}{27qr^2}\\&=\frac{p^3}{9qr}-\frac{p^3}{279r}-\frac{p^3}{27qr}\\&=\frac{p^3}{27qr}\\z(p,q,r)&=\left(\frac{p^3}{27q^2r}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{p^3}{27qr^2}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{p^2}{9qr}\end{aligned}$$

となります．これから

$$\frac{\partial\Pi}{\partial p}=\frac{3p^2}{27qr}=\frac{p^2}{9qr}=z(p,q,r),\quad\frac{\partial\Pi}{\partial q}=-\frac{p^3}{27q^2r}=-x(p,q,r),\quad\frac{\partial\Pi}{\partial q}=-\frac{p^3}{27qr^2}=-y(p,q,r)$$

と Hoteling の補題が成立することが分かります.