wLec 08, 2020 年 11 月 25 日演習問題解答

I $p,q,I>0$ とします．効用関数

$$u(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$$

を制約条件

$$I-px-qy=0$$

の下で考えます．停留点を求めて極大点であることを示しましょう．

解答　$g(x,y)=I-px-qy$ とすると

$$g_x=-p,\ g_y=-q$$

$$u_x=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}},\ u_y=\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$$

となります．(x,y) で極大または極小ならば

$$\begin{cases}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}+\lambda(-p) & = & 0 & \cdots\cdots(i)\\ \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}+\lambda(-q) & = & 0 & \cdots\cdots(ii)\\ I-px-qy & = & 0 & \ldots\ldots(iii)\end{cases}$$

を満たす $\lambda\in\mathbf{R}$ が存在します．$x,y>0$ ですから (i) から $\lambda\neq 0$ が分かります．さらに (i) と (ii) から

$$\begin{cases}\lambda p & = & \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} & \cdots\cdots(i)'\\ \lambda q & = & \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} & \cdots\cdots(ii)'\end{cases}$$

が従います．(i)'/(ii)' から

$$\frac{p}{q}=\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{x}\quad 従って\quad px=\frac{1}{2}qy$$

となります．(iii) に代入すると

$$I-\frac{1}{2}qy-qy=I-\frac{3}{2}qy=0$$

が導かれ

$$x=\frac{I}{3p},\quad y=\frac{2I}{3q}$$

となります．さらに (ii)' から

$$\lambda=\frac{1}{q}\left(\frac{I}{3p}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2I}{3q}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{2q^2p}\right)^{\frac{1}{3}}$$

となります．次に 2 階の条件を確認します．

$$g_{xx}=g_{xy}=g_{yx}=g_{yy}=0$$

$$u_{xx}=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}},\ u_{xy}=u_{yx}=\frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}},\ u_{yy}=-\frac{2}{9}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{4}{3}}$$

となります．このとき $L=f+\lambda g$ とすると

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}0 & g_x & g_y\\ g_x & L_{xx} & L_{xy}\\ g_y & L_{yx} & L_{yy}\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix}0 & -p & -q\\ -p & -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}\\ -q & \frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}} & -\frac{2}{9}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{4}{3}}\end{vmatrix}\\ &=\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}}q^2+\frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}pq+\frac{2}{9}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{4}{3}}p^2>0\end{aligned}$$

から停留点で極大であることが分かります.

II $p, q, I > 0$ とします．効用関数

$$u(x,y) = \frac{1}{3}\log x + \frac{2}{3}\log y$$

を制約条件

$$I - px - qy = 0$$

の下で考えます．停留点を求めて極大点であることを示しましょう.

解答 $g(x,y) = I - px - qy$ とすると

$$g_x = -p, \quad g_y = -q$$

$$u_x = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}, \quad u_y = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{y}$$

となります．(x,y) で極大または極大とすると

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} + \lambda(-p) & = & 0 & \cdots\cdots(i) \\ \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{y} + \lambda(-q) & = & 0 & \cdots\cdots(ii) \\ I - px - qy & = & 0 & \ldots\ldots(iii) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．(i) において $\lambda = 0$ とすると $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} = 0$ となりますが，これを満たす x は存在しません．従って $\lambda \neq 0$ であることが分かります．(i)(ii) から

$$px = \frac{1}{3\lambda}, \quad qy = \frac{2}{3\lambda} \tag{iv}$$

が分かりますから，(iii) に代入して

$$I - \frac{1}{3\lambda} - \frac{2}{3\lambda} = I - \frac{1}{\lambda} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lambda = \frac{1}{I}$$

となります．これを (iv) に代入して

$$x = \frac{I}{3p}, \quad y = \frac{2I}{3q}$$

であることが分かります.

次に 2 階の条件を確認しましょう.

$$g_{xx} = g_{xy} = g_{yx} = g_{yy} = 0$$

$$u_{xx} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2}, \quad u_{xy} = u_{yx} = 0, \quad u_{yy} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{y^2}$$

であることが分かります．これから

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & -p & -q \\ -p & -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2} & 0 \\ -q & 0 & -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{y^2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2}q^2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{y^2}p^2 > 0 \end{aligned}$$

から停留点で極大であることが分かります.

III 制約条件

$$x^2 + 2y^2 - 24 = 0$$

の下で

$$z = x + y$$

を考えます. 停留点を求めて極大・極小を判定しましょう.

解答

$$g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 24 = 0$$

の下で

$$z = f(x,y) = x + y$$

を考えます.

$$g_x = 2x,\ g_y = 4y,\ f_x = f_y = 1$$

と計算されますから, (x,y) で極大・極小ならば

$$\left\{\begin{array}{rcll} 1 + \lambda \cdot 2x & = & 0 & \cdots\cdots(i) \\ 1 + \lambda \cdot 4y & = & 0 & \cdots\cdots(ii) \\ x^2 + 2y^2 - 24 & = & 0 & \ldots\ldots(iii) \end{array}\right.$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します. (i) において $\lambda = 0$ とすると $1 = 0$ となりますから, $\lambda \neq 0$ が必要であることが分かります. (i) と (ii) から

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \quad y = -\frac{1}{4\lambda} \tag{iv}$$

が従いますが, これを (iii) に代入すると

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{8\lambda^2} = 24$$

となりますから, $\lambda = \pm\frac{1}{8}$ であることが分かります. (iv) に代入すると

$$x = \mp 4,\ y = \mp 2$$

であることが分かります. 以上で停留点は

$$(x, y, \lambda) = (\mp 4, \mp 2, \pm\frac{1}{8})$$

です.

つぎに 2 階の条件を確認しましょう.

$$g_{xx} = 2,\ g_{xy} = g_{yx} = 0,\ g_{yy} = 4$$

$$f_{xx} = f_{xy} = f_{yx} = f_{yy} = 0$$

であることが分かります．これから $L = f + \lambda g$ とおくと

$$\begin{aligned} B(x,y,\lambda) := \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 2x & 4y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 4y & 0 & 4\lambda \end{vmatrix} \\ &= -32\lambda y^2 - 16\lambda x^2 = -16\lambda(x^2+2y^2) = -16\cdot 24 \end{aligned}$$

が成立します．

(1) $(x,y,\lambda) = (-4,-2,\frac{1}{8})$ のとき

$$B = -48 < 0$$

から極小であることが分かります．

(2) $(x,y,\lambda) = (4,2,-\frac{1}{8})$ のとき

$$B = 48 > 0$$

から極大であることが分かります．

IV 制約条件

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

の下で

$$z = f(x,y) = xy$$

を考えます．停留点を求めて極大・極小を判定しましょう．

解答

$$g_x = 2x,\ g_y = 2y,\ f_x = y,\ f_y = x$$

と計算されます．(x,y) で極大または極小であるとすると

$$\begin{cases} y + \lambda\cdot 2x &= 0 \quad \cdots\cdots (i) \\ x + \lambda\cdot 2y &= 0 \quad \cdots\cdots (ii) \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0 \quad \ldots\ldots (iii) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．(i) から $y = -2\lambda x$ となりますが、これを (ii) に代入すると

$$x(1-4\lambda^2) = 0$$

となります．$x = 0$ とすると (i) から $y = 0$ となりますが，$(x,y) = (0,0)$ は (iii) を満たしません．よって $x \neq 0$ 従って

$$4\lambda^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

であることが分かります．

(1) $\lambda = \frac{1}{2}$ のとき(i) から $x = -y$ となりますから (iii) に代入して $(x,y) = (\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2})$ であることが分かります．

(2) $\lambda = -\frac{1}{2}$ のとき(i) から $x = y$ となりますから (iii) に代入して $(x,y) = (\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$ であることが分かります．

さらに 2 階の条件について考えます.

$$g_{xx} = 2,\ g_{xy} = g_{yx} = 0,\ g_{yy} = 2$$
$$f_{xx} = 0,\ f_{xy} = f_{yx} = 1,\ f_{yy} = 0$$

であることが分かります．これから $L = f + \lambda g$ とおくと

$$\begin{aligned} B(x, y, \lambda) &:= \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 1 \\ 2y & 1 & 2\lambda \end{vmatrix} \\ &= -8\lambda y^2 + 4xy - 8\lambda x^2 \\ &= 4xy - 8\lambda \end{aligned}$$

となります.

(1) $\underline{(x, y, \lambda) = (\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})\text{ のとき}}$

$$B = 4 \cdot \frac{1}{2} - 8 \cdot \frac{1}{2} = -6 < 0$$

から極小であることが分かります.

(2) $\underline{(x, y, \lambda) = (\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2})\text{ のとき}}$

$$B = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 6 > 0$$

から極大であることが分かります.

V $u(x, y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ とします．制約条件

$$u(x, y) = \bar{u}$$

の下で $f(x, y) = px + qy$ を考えます．停留点を求めましょう.

解答 (x, y) で極大・極小であるとすると

$$\left\{ \begin{array}{rcll} p - \mu \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} & = & 0 & \cdots\cdots(i) \\ q - \mu \cdot \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}} & = & 0 & \cdots\cdots(ii) \\ x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - \bar{u} & = & 0 & \ldots\ldots(iii) \end{array} \right.$$

を満たす $\mu \in \mathbf{R}$ が存在します．(i) と (ii) から

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \mu \cdot x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} & = & 3p & \cdots\cdots(i)' \\ \mu \cdot x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}} & = & 3q & \cdots\cdots(ii') \end{array} \right.$$

を得ます．(i)’/(ii)’ から

$$\frac{y}{x} = \frac{p}{q}$$

となります．$y = \frac{p}{q}x$ として (iii) に代入すると

$$\bar{u} = x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$$

から

$$x = \left(\bar{u} \cdot \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} = \bar{u}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{2}}$$

を得ます．また同様に

$$y = \bar{u}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{2}}$$

を得ます．このとき Lagrange 未定乗数は (i)' のっ両辺に x を掛けて $x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} = \bar{u}$ を用いると

$$\mu x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} = \mu \bar{u} = 3px = 3p\bar{u}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{2}} = 3p\bar{u}^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}$$

から

$$\mu = 3\bar{u}^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}$$

となります．

注意 ここで得た

$$x^*(p,q,\bar{u}) = \bar{u}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad y^*(p,q,\bar{u}) = \bar{u}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{2}}$$

を **Hicks 型（補償）需要関数**と呼びます．

VI V によって得られた **Hicks 型（補償）需要関数**を

$$x^*(p,q,\bar{u}),\ y^*(p,q,\bar{u})$$

とします．**最小支出関数**

$$E(p,q,\bar{u}) = px^*(p,q,\bar{u}) + qy^*(p,q,\bar{u})$$

と定めるとき，**マッケンジーの補題**

$$\frac{\partial E}{\partial p}(p,q,\bar{u}) = x^*(p,q,\bar{u})$$

$$\frac{\partial E}{\partial q}(p,q,\bar{u}) = y^*(p,q,\bar{u})$$

が成立することを示しましょう．

解答 最小支出関数は

$$\begin{aligned} E(p,q,\bar{u}) &= p \cdot \bar{U}^{\frac{2}{3}} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{2}} + q \cdot \bar{U}^{\frac{2}{3}} \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\bar{u}^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となります．これから

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial p} &= \bar{u}^{\frac{3}{2}} p^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} = x^*(p,q,\bar{u}) \\ \frac{\partial E}{\partial q} &= \bar{u}^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}} = y^*(p,q,\bar{u}) \end{aligned}$$

VII VI に引続き，$I - px - qy = 0$ の下で $u(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$ を最大化して需要関数

$$x(p,q,I) = \frac{I}{2p},\ y(p,q,I) = \frac{I}{2p}, \tag{7}$$

を得たとします．間接効用関数を

$$v(p,q,I) = u(x(p,q,I), x(p,q,I)) \tag{8}$$

と定めるとき，以下が成立することを具体的に計算して示しましょう．

(1)

$$x^*(p,q,\bar{u}) = x(p,q,E(p,q,\bar{u})) \tag{9}$$

(2)

$$x(p,q,I) = x^*(p,q,v(p,q,I)) \tag{10}$$

(3)

$$v(p,q,E(p,q,\bar{u})) = \bar{u} \tag{11}$$

(4)

$$E(p,q,v(p,q,I)) = I \tag{12}$$

解答 (1)

$$x(p,q,E(p,q,\bar{u})) = \frac{E(p,q,\bar{u})}{2p} = \frac{2\bar{u}^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}}{2p} = \bar{u}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} = x^*(p,q,\bar{u})$$

(2)

$$v(p,q,I) = \left(\frac{I}{2p}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{I}{2q}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{I^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}} p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}}}$$

から

$$x^*(p,q,v(p,q,I)) = \left(\frac{I^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{2}{3}} p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{I}{2p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{I}{2p} = x(p,q,I)$$

(3)

$$v(p,q,E(p,q,\bar{u})) = \frac{\left(2\bar{u}^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}} p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}} \bar{u} p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}} p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}}} = \bar{u}$$

(4)

$$E(p,q,v(p,q,I)) = 2v(p,q,I)^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{I^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}} p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} = 2\frac{I}{2p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}} p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} = I$$

補足 スルツキー方程式　VIII を用いると

$$x^*(p,q,\bar{u}) = x(p,q,E(p,q,\bar{u}))$$

が成立することが分かります．この両辺を p, q で偏微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^*}{\partial p} &= \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial I} \cdot \frac{\partial E}{\partial p} \\ &= \frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial I} \cdot x \\ \frac{\partial x^*}{\partial q} &= \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial x}{\partial I} \cdot \frac{\partial E}{\partial q} \\ &= \frac{\partial x}{\partial q} - \frac{\partial x}{\partial I} \cdot y\end{aligned}$$

を得ます．$\frac{\partial y^*}{\partial p}, \frac{\partial y^*}{\partial q}$ も同様に計算すると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^*}{\partial p} & \frac{\partial x^*}{\partial q} \\ \frac{\partial y^*}{\partial p} & \frac{\partial y^*}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial q} \\ \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial q} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial I} \\ \frac{\partial y}{\partial I} \end{pmatrix} (x\ y)$$

が従います．これをスルツキー方程式と呼びます.

VIII 曲線 $g(x, y) := x^2 - xy + y^2 - 1$ を $(1, 1)$ の近傍で解いた

$$y = \varphi(x) = \frac{x + \sqrt{4 - 3x^2}}{2}$$

に対して $\varphi''(1)$ を g の 1 階および 2 階の偏微分係数を用いて求めましょう．

解答

$$g_x = 2x - y, \quad g_y = -x + 2y$$

$$g_{xx} = 2,\ g_{xy} = g_{yx} = -1,\ g_{yy} = 2$$

となる．これから

$$\begin{aligned}\varphi''(1) &= \frac{1}{g_y(1,1)^3} \begin{vmatrix} 0 & g_x(1,1) & g_y(1,1) \\ g_x(1,1) & g_{xx}(1,1) & g_{xy}(1,1) \\ g_y(1,1) & g_{yx}(1,1) & g_{yy}(1,1) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -6\end{aligned}$$

であることが分かります.

XI **(1)** $\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{3-x}} dx$, **(2)** $\int_0^1 \frac{x-1}{(2-x)^2} dx$, **(3)** $\int_1^2 x\sqrt{2-x} dx$, **(4)** $\int_0^6 \left(\frac{x}{3} - 1\right)^4 dx$, **(5)** $\int_1^2 \frac{e^x}{e^x+1} dx$,
(6) $\int_1^2 \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx$, **(7)** $\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x} dx$, **(8)** $\int_0^1 \sqrt{3-2x} dx$

解答 (1) $t=3-x$ となるように $x=\varphi(t):=3-t$ とおくと $\varphi'(t)=-1$, $\varphi(2)=1$, $\varphi(-1)=4$ となるので

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}\frac{x}{\sqrt{3-x}}dx &= \int_{4}^{1}\frac{3-t}{\sqrt{t}}(-1)dt\\ &= \int_{1}^{4}\left(\frac{3}{\sqrt{t}}-\sqrt{t}\right)dt\\ &= 3\left[2\sqrt{t}\right]_{1}^{4}-\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_{1}^{4}\\ &= 3\cdot 2(1-0)-\frac{2}{3}(8-1)=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

ここで対応

t	4	$\searrow$	1
x	-1	$\nearrow$	2

を用いました.

(別解) $t=\sqrt{3-x}$ となるように $x=\varphi(t):=3-t^2$ とおきます．$t\geq 0$ であるので $x=-1$ には $t=\sqrt{4}=2$, $x=2$ には $t=\sqrt{1}=1$ が対応します．従って対応

t	2	$\searrow$	1
x	-1	$\nearrow$	2

を用います．このとき $\varphi'(t)=-2t$ となりますから

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}\frac{x}{\sqrt{3-x}}dx &= \int_{2}^{1}\frac{3-t^2}{t}\cdot(-2t)dt\\ &= 2\int_{1}^{2}(3-t^2)dt\\ &= 6\left[t\right]_{1}^{2}-2\left[\frac{t^2}{3}\right]_{1}^{2}\\ &= 6-2\frac{8-1}{3}=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

(2) $t=2-x$ となるように $x=\varphi(t):=2-t$ とすると対応

t	2	$\searrow$	1
x	0	$\nearrow$	1

が定まります．$\varphi'(t)=-1$ から

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1}\frac{x-1}{(2-x)^2}dx &= \int_{2}^{1}\frac{1-t}{t^2}(-1)dt\\ &= \int_{1}^{2}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}\right)dt\\ &= \left[-\frac{1}{t}\right]_{1}^{2}-\left[\log t\right]_{1}^{2}\\ &= \left(-\frac{1}{2}+1\right)-(\log 2-\log 1)=\frac{1}{2}-\log 2\end{aligned}$$

(3) $t=2-x$ となるように $x=\varphi(t):=2-t$ とすると対応

t	2	$\searrow$	1
x	0	$\nearrow$	1

が定まります．$\varphi'(t)=-1$ から

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\sqrt{2-x}dx &= \int_1^0 (2-t)\sqrt{t}(-1)dt\\ &= \int_0^1 \left(2\sqrt{t}-t\sqrt{t}\right)dt\\ &= 2\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^1 - \left[\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}\right]_0^1\\ &= \frac{4}{3}-\frac{2}{5}=\frac{14}{15}\end{aligned}$$

(4) $y=\varphi(x)=\frac{x}{3}-1$ とすると $\varphi'(x)=\frac{1}{3}$ となります．

$$\begin{aligned}\int_0^6 \left(\frac{1}{3}x-1\right)^4 dx &= 3\int_0^6 \left(\frac{1}{3}x-1\right)^4\left(\frac{1}{3}x-1\right)' dx\\ &= \frac{1}{3}\int_{-1}^1 y^4 dy = 3\cdot\left[\frac{y^5}{5}\right]_{-1}^1 = 3\cdot\frac{1^5-(-1)^5}{5}=\frac{6}{5}\end{aligned}$$

ここで対応

x	0	$\nearrow$	6
y	-1	$\nearrow$	1

を用いました．

(5) $y=\varphi(x)=e^x+1$ とすると $\varphi'(x)=e^x$, $\varphi(2)=e^2+1$, $\varphi(1)=e+1$ から

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{e^x}{e^x+1}dx &= \int_{e+1}^{e^2+1}\frac{1}{y}dy\\ &= [\log y]_{e+1}^{e^2+1} = \log(e^2+1)-\log e+1 = \log\frac{e^2+1}{e+1}\end{aligned}$$

(6) $y=\varphi(x)=e^x+1$ とすると $\varphi'(x)=e^x$, $\varphi(2)=e^2+1$, $\varphi(1)=e+1$ から

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx &= \int_{e+1}^{e^2+1}\frac{1}{y^2}dy\\ &= \left[-\frac{1}{y}\right]_{e+1}^{e^2+1} = -\frac{1}{e+1}+\frac{1}{e^2+1} = \frac{e(e-1)}{(e+1)(e^2+1)}\end{aligned}$$

(7) $x=\varphi(x)=\log t$ とすると $\varphi'(t)=\frac{1}{t}$, $\varphi(e)=1$, $\varphi(1)=0$ から

$$\int_1^e \frac{(\log t)^2}{t}dt = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

(8) $y=\varphi(x)=3-2x$ とすると $\varphi'(y)=-2$ である．さらに $\varphi(1)=1$, $\varphi(0)=3$ であるので

$$\int_0^1 \sqrt{3-2x}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{3-2x}(3-2x)'dx \qquad = -\frac{1}{2}\int_3^1 \sqrt{y}dy = \frac{1}{2}\int_1^3 \sqrt{y}dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[y\sqrt{y}\right]_1^3 = \frac{1}{3}(3\sqrt{3}-1)$$