関数の極限

Nobuyuki TOSE

CalcNT Lec05, May 15, 2019

区間 (interval)

$a < b$ とする.

開区間 (open intervals)

$$(a, b) := \{x \in \mathrm{R};\ a < x < b\}$$
$$(a, +\infty) = \{x \in \mathrm{R};\ a < x\}$$
$$(-\infty, b) = \{x \in \mathrm{R};\ x < b\}$$

閉区間 (closed intervals)

$$[a, b] := \{x \in \mathrm{R};\ a \leq x \leq b\}$$
$$[a, +\infty) := \{x \in \mathrm{R};\ a \leq x\}$$
$$(-\infty, b] := \{x \in \mathrm{R};\ x \leq b\}$$

注意 $[a, b) := \{x \in \mathrm{R};\ a \leq x < b\}$

写像・差集合

X と Y を集合とします．X から Y への写像

$$f:\ X \to Y$$

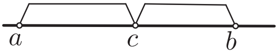
とは任意の $x \in X$ に対して Y の要素 $f(x) \in Y$ をただ 1 個指定することです．この状況で X を f の定義域，Y を f の値域（終域）と呼びます．

集合 X とその部分集合 A, B があるとします．このとき差集合

$$A \setminus B := \{x \in A;\ x \notin B\}$$

$a < c < b$ とします．$(a,b) \setminus \{c\} = (a,c) \cup (c,b)$ に注意します．関数

$$f:\ (a,b) \setminus \{c\} \to \mathbf{R}$$



に対して

$$f(t) \to A \quad (t \to c)$$

$\Leftrightarrow$

数列 $\{t_n\}$ が条件

$$a < t_n < b,\ \ t_n \neq c,\ \ t_n \to c \quad (n \to +\infty)$$

を満たすならば

$$f(t_n) \to A \quad (n \to +\infty)$$

注意 条件 $a < t_n < b,\ \ t_n \neq c$ は $f(t_n)$ が定義されるためです．

例

関数 $f(x) := \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$ に対して $a \neq 0$, $x \neq 0, a$ とするとき

$$\mathrm{A}(a, f(a)), \quad \mathrm{P}(x, f(x))$$

が定める直線 AP の傾きを考えます：

$$F(x) := \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} \quad (x \neq a, 0)$$

このとき

$$F(x) \to -\frac{1}{a^2} \quad (x \to a)$$

例 (2)

$$x_n \neq 0,\ x_n \neq a,\ x_n \to a(\neq 0) \quad (n \to +\infty)$$

のとき

$$\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$$

から

$$\begin{aligned} F(x_n) &= \frac{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}}{x_n - a} = \frac{\frac{a - x_n}{x_n a}}{x_n - a} \\ &= -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x_n} \to -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2} \quad (n \to +\infty) \end{aligned}$$

定理 CT46P

定理

$$f:\ (a,b)\setminus\{c\}\to \mathbf{R},\quad g:\ (a,b)\setminus\{c\}\to \mathbf{R}$$

に対して $x\to c$ のとき

$$f(x)\to A,\quad g(x)\to B$$

とします．このとき

$$f(x)\pm g(x)\to A\pm B \tag{I}$$

$$f(x)\cdot g(x)\to A\cdot B \tag{II}$$

$g(x)\neq 0\ (x\in(a,b), x\neq c)$, $B\neq 0$ ならば

$$\frac{f(x)}{g(x)}\to\frac{A}{B} \tag{III}$$

定理の証明

(II) を証明しよう．$\{x_n\}$ が

$$a < x_n < b, \quad x_n \neq c,\ x_n \to c$$

を満たすとします．このとき

$$f(x_n) \to A, \quad g(x_n) \to B$$

従って

$$f(x_n) \cdot g(x_n) \to A \cdot B$$

$a_n \to \alpha, b_n \to \beta$ $(n \to +\infty)$ ならば $a_n b_n \to \alpha\beta$

はさみうちの定理

定理 CT42P

$$f:\ (a,b)\setminus\{c\}\to \mathbf{R},\quad g:\ (a,b)\setminus\{c\}\to \mathbf{R}$$
$$h:\ (a,b)\setminus\{c\}\to \mathbf{R}$$

が不等式

$$f(x)\leq g(x)\leq h(x)\quad (x\in (a,b)\setminus\{c\})$$

を満たすとします．このとき

$$\begin{aligned} & f(x)\to A,\ h(x)\to A\quad (x\to c) \\ \Rightarrow & \\ & g(x)\to A\quad (x\to c) \end{aligned}$$

はさみうちの定理—証明

数列 $\{x_n\}$ が

$$a < x_n < b,\ x_n \neq c,\ x_n \to c\ (n \to +\infty)$$

を満たすとします．このとき

$$f(x_n) \to A,\ h(x_n) \to A \quad (n \to +\infty)$$

が成立します.

$$f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$$

からはさみうちの定理が使えて

$$g(x_n) \to A$$

が従います.

はさみうちの定理—応用

$a > 0$ ならば

$$\sqrt{x} \to \sqrt{a} \quad (x \to a)$$

$x, a > 0$, $x \neq a$ とします.

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

の両辺の絶対値をとると

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$$

から

$$-\frac{|x-a|}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} < \sqrt{x} < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}$$

注意

$$x \to a \quad \Rightarrow |x-a| \to 0 \tag{1}$$

これは次からから従います.

$$h_n \to 0\ (n \to +\infty) \quad \Rightarrow \quad |h_n| \to 0\ (n \to +\infty)$$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して番号 N が存在して

$$-\varepsilon < h_n < \varepsilon \quad (n \geq N)$$

から

$$-\varepsilon < 0 \leq |h_n| < \varepsilon \quad (n \geq N)$$