弾力性 (elasticity)

・ある財 X の需要関数

$$q = q(p)$$

が仮定

$$\frac{dq}{dp} < 0$$

を満たすとする。

・ある企業 A 社が X の市場を独占しているとする。

このときの総収入 (Total Revenue)

$$TR = p \cdot q(p)$$

について

$$\frac{dTR}{dp} = 1 \cdot q(p) + p \cdot \frac{dq}{dp}$$
$$= q\left(1 + \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}\right)$$

であることが分かる。

$$0 < \rho := -\frac{p}{q}\cdot\frac{dq}{dp}$$

を需要の価格弾力性と呼ぶ。このとき

$$\frac{dTR}{dp} = q(1-\rho)$$

となるが

$\rho > 1$ のとき弾力的。

$\rho < 1$ のとき非弾力的。

と呼ぶ。

<u>読み換え</u>　$-\dfrac{\Delta q/q}{\Delta p/p} \longrightarrow -\dfrac{p}{q}\cdot\dfrac{dq}{dp} = \rho \quad (\Delta p \to 0)$

となる。pが価格比でx%上昇するとき需要がy%減少する場合の比率が$\frac{y}{x} = \rho$であるということ。

両対数軸へのスケール変換

$$\frac{d}{dp}\log q = \frac{1}{q}\cdot\frac{dq}{dp}.$$

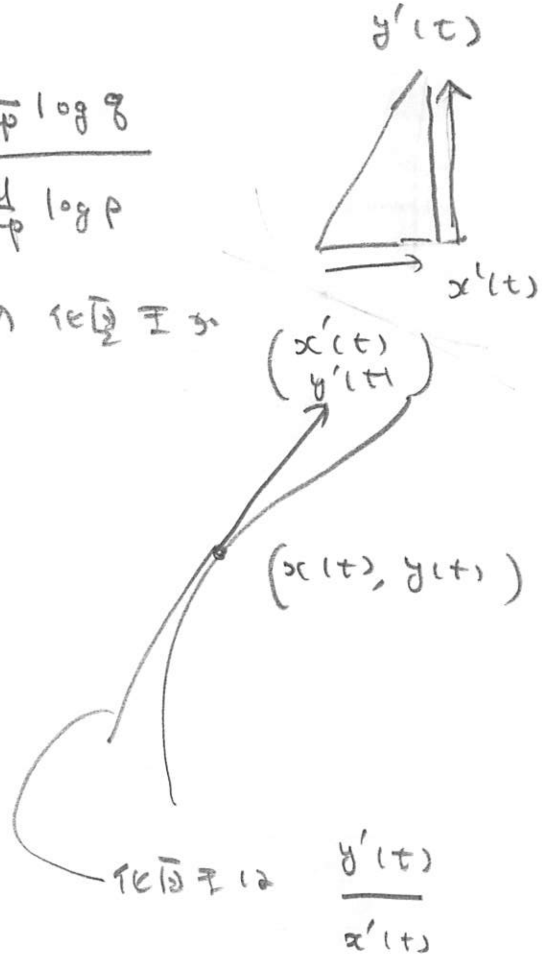
に注意すると

$$\rho := -p\frac{d}{dp}\cdot\log q = -\frac{\frac{d}{dp}(\log q)}{\frac{1}{p}} = -\frac{\frac{d}{dp}\log q}{\frac{d}{dp}\log p}$$

となる。 p をパラメータとして $(\log p, \log q)$ を動かすときの傾きが

$$\frac{\frac{d}{dp}\log q}{\frac{d}{dp}\log p}$$

であることに注意する



さらに $u=\log p$, $v=\log q$ とすると

$$\frac{dv}{du} = \frac{d}{du}\left(\log q(e^u)\right)$$

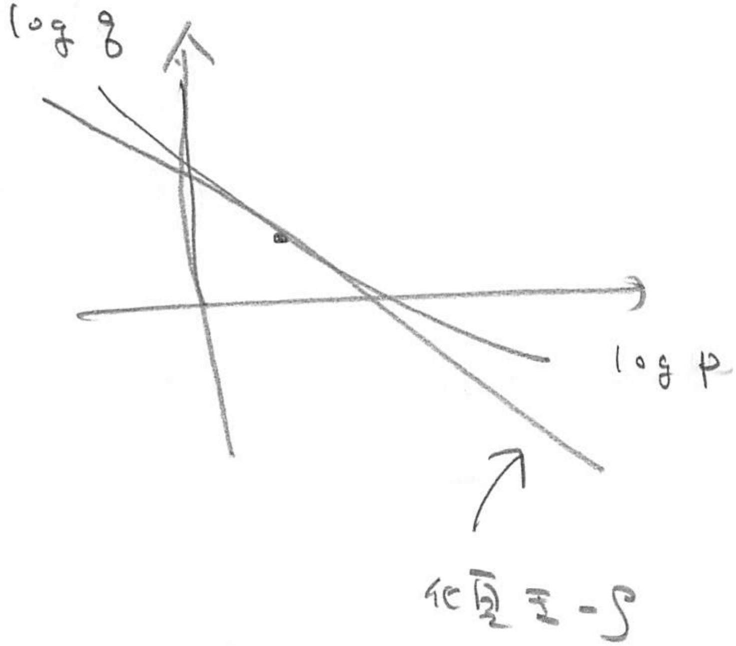
$$= \frac{1}{q}\cdot\frac{dq}{dp}\cdot\frac{de^u}{du} = \frac{1}{q}\cdot\frac{dq}{dp}\cdot e^u$$

$$= \frac{p}{q}\cdot\frac{dq}{dp} = -\rho$$

から

$$\rho = -\frac{dv}{du}.$$

両対数グラフにプロットしたときの
傾きのマイナス倍がρ.



応用上重要 $\rho = \alpha$(一定)の場合.

$$\frac{dv}{du} = -\alpha \text{ (定数)}$$ から

$$v = -\alpha \cdot u + C$$

従って

$$\log q = -\alpha \log p + C$$

から 定数をaとして

$$q = a p^{-\alpha}$$

となる. $\alpha = 1$ のときは $\boxed{q = \frac{a}{p}}$

まとめ　$y=f(x)$　$(x, y>0)$ に対して $z=\dfrac{y}{x}$ とする

$$\frac{dz}{dx}=\frac{y' \cdot x - y}{x^2}=\frac{y}{x^2}\left(\frac{x}{y}y'-1\right)$$

から

$$\sigma=\frac{x}{y}\cdot y'=\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}\overset{*}{=}\frac{d(\log y)}{d(\log x)}$$ を弾力性と呼ぶ.

$\sigma>1$ ならば $z=\dfrac{y}{x}$ は x に関して増加

$\sigma<1$ ならば $z=\dfrac{y}{x}$ は ―――― 減少.

$*$ は $v=\log y$, $u=\log x$ とすると

$$\frac{dv}{du}=\frac{d(\log y(e^u))}{du}=\frac{1}{y(e^u)}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{du}$$

$$=\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}\frac{de^u}{du}=\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot e^u=\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$