逆関数の微分

復習（連続関数の逆関数定理）

$$f : [A, B] \longrightarrow \mathbb{R}$$

は連続関数とする

$$A \leq s < t \leq B \implies f(s) < f(t)$$

$\implies$ 逆関数

$$f^{-1} : [f(A), f(B)] \longrightarrow [A, B]$$

が存在し連続

応用　$f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ が微分可能であるとき

が

$$f'(t) > 0 \quad (t \in (a, b))$$

が常に成立すると仮定する。このとき　$a < A < B < b$ として

$$f^{-1} : [f(A), f(B)] \longrightarrow [A, B]$$

が存在し連続

端点が面倒なので

$$f^{-1} : (f(A), f(B)) \longrightarrow (A, B)$$

と考える. $f(A) < y_0 < f(B)$ とすると f^{-1} は $y = y_0$ で微分可能となる.

実際 $f(x) = y$, $f(x_0) = y_0$ である $x, x_0 \in (A, B)$ が唯一つ存在して

$y \neq y_0$ とする.　　　$x \neq x_0$

となる.

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \longrightarrow \frac{1}{f'(x_0)}$$

において $y \to y_0$ のとき

f^{-1} の連続性から $x \to x_0$ となる

公式　$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

例

$y = \log x \qquad x = e^{y}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = e^{y}.$$

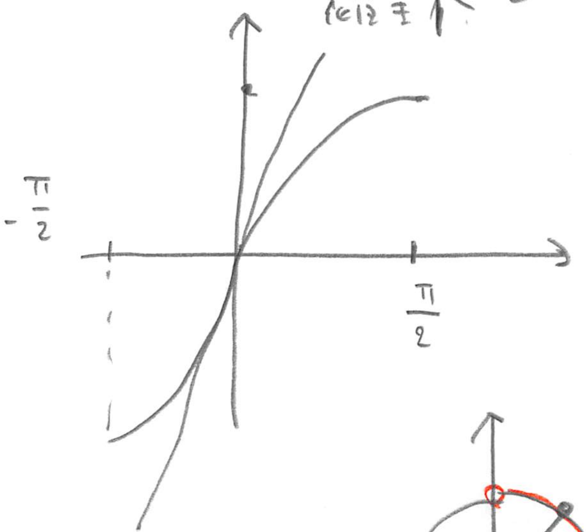
例

$y = x^2 \quad (x > 0) \qquad x = \sqrt{y}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}$$

例

$y = \sin x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right) \qquad x = \sin^{-1} y$



$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

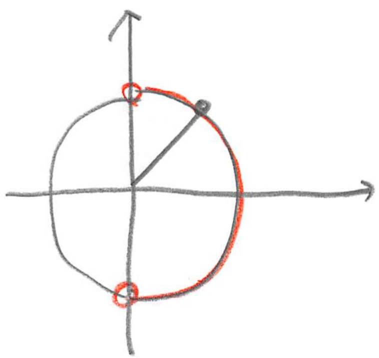
$$= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

ここで

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ のとき $\cos x > 0$ なので

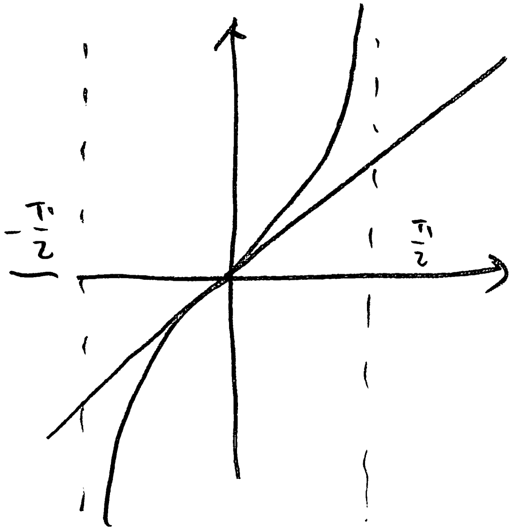
$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

から $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$.



例

$y = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad x = \tan^{-1} y$



$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x.$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

$$(\tan^{-1} y)' = \frac{1}{1 + y^2}$$

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$