3変数関数の極値問題

2020年11月 emath, intro

[illegible]

$\mathbb{R}^3$ 中の開球　半径 $\delta > 0$ 中心 $P_0(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ の開球は

$$B_\delta(P_0) := \{ (x, y, z) ; \ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < \delta^2 \}$$

極大・極小　$U \, (\subset \mathbb{R}^3)$ を開集合として

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

を考える.　$P_0 \in U$ で f が極小(大)とは $\exists \delta > 0$ に対し

$$f(P) \geq f(P_0) \qquad (P \in B_\delta(P_0))$$

$$\left(\quad f(P) \leq f(P_0) \qquad (P \in B_\delta(P_0)) \quad \right)$$

<u>定理</u>　$U\ (\subset \mathbb{R}^3)$ は開集合，$f : U \to \mathbb{R}$ とする．

$P_0 \in U$ で f が極大(小)

$$\Longrightarrow \quad f_x(P_0) = f_y(P_0) = f_y(P_0) = 0$$

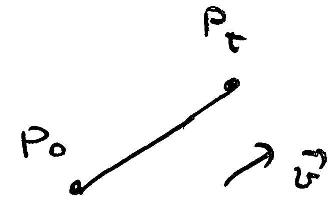
<u>定理</u> (1) $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ は $P_0 \in U$ において極小とする.

$$\Longrightarrow \quad (H(f)(P_0)\vec{v}, \vec{v}) \geqq 0$$

(2) $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ は $P_0 \in U$ において極大とする.

$$(H(f)(P_0)\vec{v}, \vec{v}) \leqq 0.$$

証明　$\vec{v}=\vec{0}$ は考える必要はないので $\vec{v}\neq\vec{0}$ とする.



$$F(t) := f(P_0 + t\vec{v})$$

とする. このとき　$P_t = P_0 + t\vec{v}$ とすると

$$F'(t) = (\nabla(f)(P_t), \vec{v})$$

特に　$t=0$ のとき

$$F'(0) = (\nabla(f)(P_0), \vec{v}) = (\vec{0}, \vec{v}) = 0$$

P_0 で f が極小なので $\exists\delta>0$

$$F(t) \geqq F(0) \quad \left(t_0-\delta < \overset{t\neq 0}{t} < t_0+\delta\right)$$

Taylorの定理から　0とtの間に s が存在して

$$F(0) \leqq F(t) = F(0) + F'(0)t + F''(s)t^2 = F(0) + F''(s)t^2$$

従って　$t^2>0$ に注意して

$$F''(s) \geqq 0$$

$t\to 0$ のとき $s\to 0$ から　　$F''(0)\geqq 0$　従って　$(H(f)\vec{v}, \vec{v}) \geqq 0$

定理 $U \subset \mathbb{R}^3$ 開凸集合, $f : U \to \mathbb{R}$, $P_0 \in U$

$$f_x(P_0) = f_y(P_0) = f_z(P_0) = 0$$

$$(H(f)(P)\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad (P \in U, \vec{v} \neq \vec{0})$$

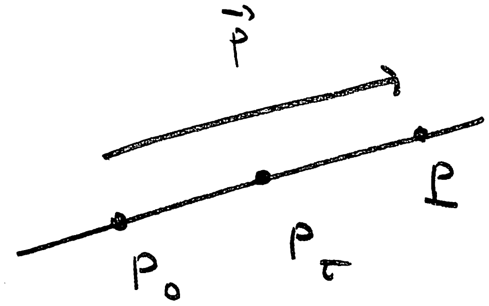
$\Longrightarrow$

$$f(P) > f(P_0) \quad (P \in U, P \neq P_0)$$

（証明）

$P \neq P_0$ である $P \in U$ をとる。 $\vec{p} = \overrightarrow{P_0 P}$ とする。

P_t を $P_0 + t\vec{p}$ とする



$$F(t) = f(P_t)$$

とすると

$$F'(t) = (\nabla(f)(P_t), \vec{v})$$

特に

$$F'(0) = (\nabla(f)(P_0), \vec{v}) = (\vec{0}, \vec{v}) = 0$$

さらに

$$F''(t) = (H(f)(P_t)\vec{v}, \vec{v}) > 0$$

が成立する。これから

$$F(t) > F(0) \quad (t \neq 0)$$

特に

$$F(1) > F(0) \quad \text{i.e.} \quad f(P) > f(P_0)$$

定理　$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$　C^2級とする．$P_0 \in U$ に対して

$$f_x(P_0) = f_y(P_0) = f_z(P_0) = 0$$

$$(H(f)(P_0)\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$$

$\Rightarrow$　$\exists \delta > 0$

$$f(P) > f(P_0) \quad (P \neq P_0,\ P \in B_\delta(P_0))$$