3変数関数の極値問題

2020年11月 emath, intro

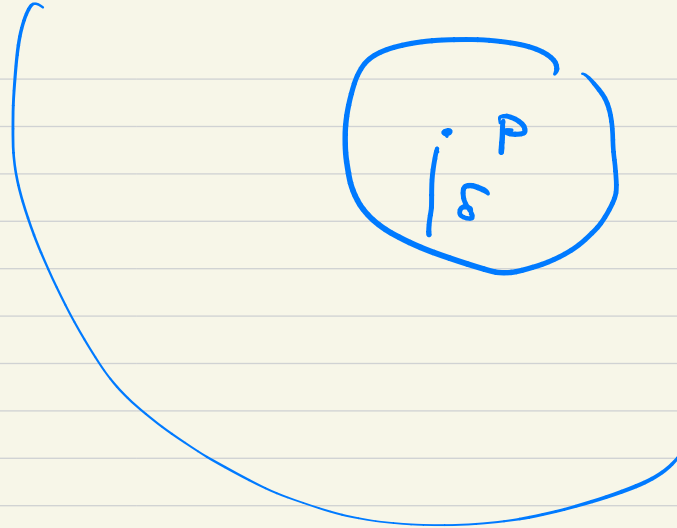
[illegible]

$$w = f(x, y, z)$$

$U \subset \mathbb{R}^3$ 開集合 とは

$\forall P \in U \quad \exists \delta > 0$

$B_\delta(P) \subset U$



$\mathbb{R}^3$ 中の開球

an open ball

半径 $\delta > 0$ 中心 $P_0(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ の開球とは

$$B_\delta(P_0) := \{(x, y, z);\ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < \delta^2\}$$

極大・極小

$U (\subset \mathbb{R}^3)$ を開集合とし

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

を考える。 $P_0 \in U$ で f が極小(大)とは $\exists \delta > 0$ に対し

$$f(P) \geq f(P_0) \qquad (P \in B_\delta(P_0))$$

$B_\delta(P_0)$ に制限すると P_0 で最小。

$$\left(f(P) \leq f(P_0) \qquad (P \in B_\delta(P_0)) \right)$$

f を $B_\delta(P_0)$ に制限すると P_0 で最大。

定理 $U(\subset \mathbb{R}^3)$ は開集合，$f: U \to \mathbb{R}$ とする．

x, y, z について偏微分可能．

$\underset{(a, b, c)}{P_0} \in U$ で f が極大（小）

$\Longrightarrow$ $f_x(P_0) = f_y(P_0) = f_{\cancel{y}\,z}(P_0) = 0$

微分可能．

$F(t) = f(t, b, c)$

$\exists \delta > 0 \wedge B_\delta(P_0)$ に制限すると f は

P_0 で最小．

$F(t)$ $(a - \delta < t < a + \delta)$

$t = a$ で最小 $\longrightarrow$ $F'(a) = 0$

（極小）

2変数でも同様。

定理 (1) $f : U \to \mathbb{R}$ は $P_0 \in U$ において極小とする。

$f_x(P_0) = f_y(P_0) = f_z(P_0) = 0$ (4

f は C^2 級

$\Longrightarrow (H(f)(P_0)\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$

$H(f)(P_0)$ が定める2次形式は非負定値

(2) $f : U \to \mathbb{R}$ は $P_0 \in U$ において極大とする。

$(H(f)(P_0)\vec{v}, \vec{v}) \leq 0$.

非正定値

Young

$$H(f)(P_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(\ ) & \boxed{f_{xz}(\ )} \\ f_{yx}(\ ) & f_{yy}(\ ) & f_{yz}(\ ) \\ \boxed{f_{zx}(\ )} & f_{zy}(\ ) & f_{zz}(\ ) \end{pmatrix}$$

対称。

Hesse 行列 at P_0 of f.

証明　$\vec{v}=\vec{0}$ は考える必要はないので　$\vec{v}\neq\vec{0}$ とする.

$\exists\delta>0$　$B_\delta(P_0)\ni P$

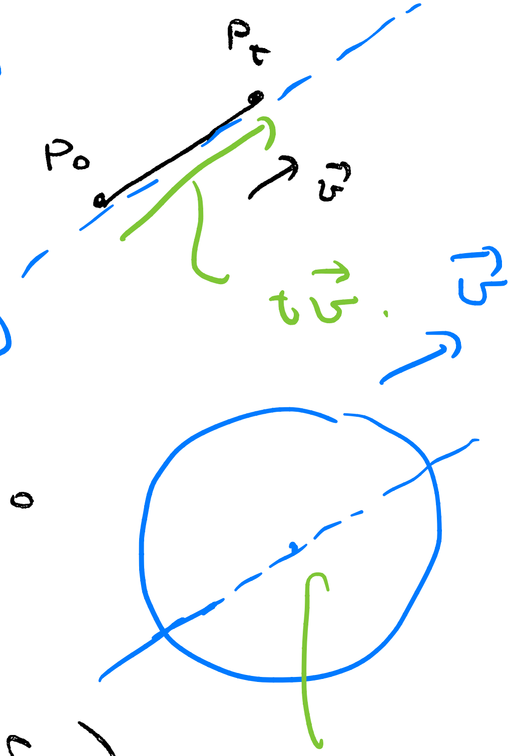
$f(P)\geq f(P_0)$

$(P\neq P_0)$

$$F(t) := f(P_0 + t\vec{v})$$

とする.　このとき　$P_t = P_0 + t\vec{v}$ とすると

$$F'(t) = (\nabla(f)(P_t), \vec{v})$$



特に　$t=0$ のとき

$$F'(0) = (\underbrace{\nabla(f)(P_0)}_{=\vec{0}}, \vec{v}) = (\vec{0}, \vec{v}) = 0$$

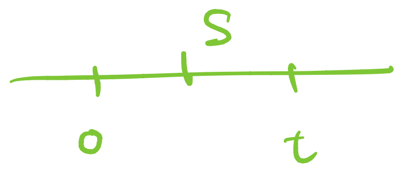
P_0 で f が極小なので　$\exists\delta>0$

$t\neq0$

$$F(t) \geq F(0) \quad (\cancel{t_0}-\delta < t < \cancel{t_0}+\delta)$$

0

Taylorの定理から　0とtの間に s が存在して



$$F(0) \leq F(t) = F(0) + \underbrace{F'(0)}_{=0}t + \frac{1}{2}F''(s)t^2 = F(0) + \frac{1}{2}F''(s)t^2$$

従って　$t^2>0$ に注意して

$$F''(s) \geq 0$$

$F''(0)$

$t\to0$ のとき $s\to0$ から　$F''(0)\geq0$　従って　$(H(f)\vec{v}, \vec{v})\geq0$

F'' が連続

方向微分

$$F(t) = f(\overbrace{P_0 + t\vec{v}}^{P_t})$$

$$F'(t) = \left(\nabla(f)(P_t), \vec{v} \right)$$

$$F''(t) = \left(H(f)(P_t)\vec{v}, \vec{v} \right)$$

A：3次実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & p & r \\ p & b & q \\ r & q & c \end{pmatrix}$$

$\leq$

$$(A\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$$

$\Longleftrightarrow$ Aの固有値 $\alpha, \beta, \gamma \overset{\leq}{\geq} 0$

$\Longleftrightarrow$ $a, b, c \overset{\leq}{\geq} 0$

$\begin{vmatrix} a & p \\ p & b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & r \\ r & c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & q \\ q & c \end{vmatrix} \geq 0$

$\geq$

$$|A| \geq 0$$

$\leq$

莫はかしい。

定理 $U \subset \mathbb{R}^3$ 開凸集合, $f: U \to \mathbb{R}$, $P_0 \in U$

$$f_x(P_0) = f_y(P_0) = f_z(P_0) = 0$$

$$(H(f)(P)\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad (P \in U, \vec{v} \neq \vec{0})$$

$\geq$

$$\Rightarrow \quad f(P) > f(P_0) \quad (P \in U, P \neq P_0)$$

$\geq$

最小値の定理.

A : 3次 実対称

$$(A\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$$

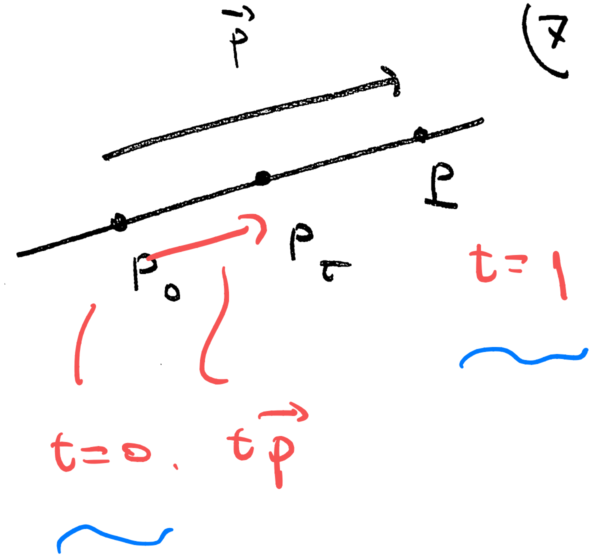
$$\Longleftrightarrow \quad \alpha, \beta, \gamma > 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad a > 0, \quad \begin{vmatrix} a & p \\ p & e \end{vmatrix} > 0, \quad |A| > 0$$

（証明）

$P \neq P_0$ である $P \in U$ をとる。 $\vec{p} = \overrightarrow{P_0 P}$ とする。

P_t を $P_0 + t\vec{p}$ とする



$$F(t) = f(P_t)$$

とすると

$$F'(t) = (\nabla(f)(P_t), \vec{v})$$

特に

$$F'(0) = (\nabla(f)(P_0), \vec{v}) = (\vec{0}, \vec{v}) = 0$$

さらに

$$F''(t) = (H(f)(P_t)\vec{v}, \vec{v}) > 0$$

が成立する。これから

$$F(t) > F(0) \quad (t \neq 0)$$

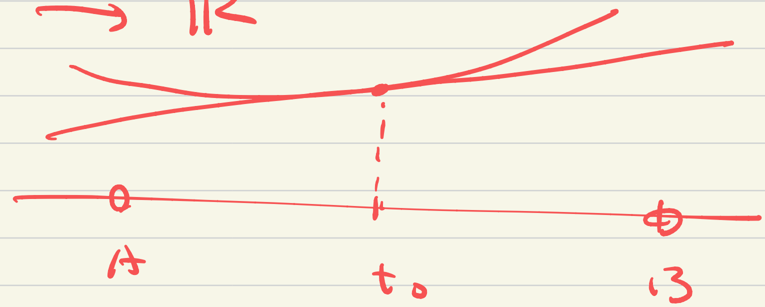
特に $t=1$

$$F(1) > F(0) \quad \text{i.e.} \quad f(P) > f(P_0)$$

$F : (A, B) \to \mathbb{R}$

$F''(t) \underset{\geq}{>} 0$

$t \in (A, B)$



$\Longrightarrow$

$$F(t) \underset{\geq}{>} F(t_0) + \underbrace{F'(t_0)}_{=0}(t - t_0) \qquad (t \neq t_0)$$

定理　$f: U \to \mathbb{R}$　C^2級とする.　$P_0 \in U$ に対し

$$f_x(P_0) = f_y(P_0) = f_z(P_0) = 0$$

$$\to \quad (H(f)(P_0)\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$$

$\Rightarrow$ $\exists \delta > 0$

$\vec{v} \neq \vec{0}$ とする

$$f(P) > f(P_0) \quad (P \neq P_0,\ P \in B_\delta(P_0))$$

$(H(f)(P)\vec{v}, \vec{v})$ 連続.

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists \delta > 0 \quad B_\delta(P_0) \ni P \\ (H(f)(P)\vec{v}, \vec{v}) > 0 \end{array}}$$