ポートフォリオ理論入門

- ☑ ポートフォリオ?
- ☑ 42 数学?
  - リスク, リターン?
  - データとベクトル・行列 （分散について考える）
- ✓ 問題とその定式化
- ✓ 仮定する条件とそこから導かれること（2次形式）
  - Lagrange の未定乗数法
  - 分散共分散行列（グラム行列）の正定値性.
  - 解

分散投資.

株	A_1	$\cdots$	A_j	$\cdots$	A_n
投入金額	x_1	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n
変量 収益率	r_1	$\cdots$	r_j	$\cdots$	r_n
第1期	r_{11}	$\cdots$	r_{1j}	$\cdots$	r_{1n}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
第i期	r_{i1}	$\cdots$	r_{ij}	$\cdots$	r_{in}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
第N期	r_{N1}	$\cdots$	r_{Nj}	$\cdots$	r_{Nn}

1単位.

ポートフォリオ

$$1 = x_1 + \cdots + x_n$$

$x_1, \cdots, x_n \geq 0$?
$x_j < 0$ という場合も有り得る.

変量

$$R = x_1 r_1 + \cdots + x_n r_n$$

$$R_1 = x_1 r_{11} + \cdots + x_n r_{1n}$$

$$\vdots$$

$$R_i = x_1 r_{i1} + \cdots + x_n r_{in}$$

$$\vdots$$

$$R_N = x_1 r_{N1} + \cdots + x_n r_{Nn}$$

変量 $\boxed{\text{ポートフォリオの収益率は } R = x_1 r_1 + \cdots + x_n r_n.}$

$$> \quad \overline{R} = x_1 \overline{r_1} + \cdots + x_n \overline{r_n}$$

$V(R)$ を求める. $\vec{r_j} = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} r_{1j} - \overline{r_j} \\ \vdots \\ r_{Nj} - \overline{r_j} \end{pmatrix}$ とすると

$$\vec{R} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} R_1 - \overline{R} \\ R_i - \overline{R} \\ R_N - \overline{R} \end{pmatrix} = x_1 \vec{r_1} + \cdots + x_n \vec{r_n} = (\vec{r_1} \cdots \vec{r_n}) \vec{x}$$

第i成分

$$= x_1 (r_{i1} - \overline{r_1}) + \cdots + x_n (r_{in} - \overline{r_n})$$

$$= x_1 r_{i1} + \cdots + x_n r_{in} - (x_1 \overline{r_1} + \cdots + x_n \overline{r_n})$$

$$V(R) = \| \vec{R} \|^2 = \left((\vec{r_1} \cdots \vec{r_n}) \vec{x}, (\vec{r_1} \cdots \vec{r_n}) \vec{x} \right)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \left({}^t(\vec{r_1} \cdots \vec{r_n}) (\vec{r_1} \cdots \vec{r_n}) \vec{x}, \vec{x} \right)$$

$V = (c_{ij})$ で $c_{ij} = (\vec{r_i}, \vec{r_j}) = \begin{cases} V(\vec{r_i}) & i = j \\ c_{r_i r_j} & i \neq j \end{cases}$

i行j列

$c_{r_i r_j}$: 共分散.

$= c_{ji} = (\vec{r_j}, \vec{r_i})$

と分散行列を定めると

$$V(R) = (V \vec{x}, \vec{x})$$

Vは対称行列.

リスク・リターン

$V(R)$ 大 $\iff$ リスク大.

$\bar{R}$ 大 $\iff$ ハイ・リターン.

好ましい

リスク小

リターン大

3変量

x	y	z	変量
x_1	y_1	z_1	
$\vdots$		$\vdots$	
x_j	y_j	z_j	データ
x_n	y_n	z_n	

$w = ax + yb + cz$ 　　a, b, cは定数.

（jに依らない）

$$\overline{w} = a\overline{x} + b\overline{y} + c\overline{z}.$$

$$V(w) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(w_i - \overline{w})^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\left\{(ax_i + by_i + cz_i) - (a\overline{x} + b\overline{y} + c\overline{z})\right\}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{a(x_i - \overline{x}) + b(y_i - \overline{y}) + c(z_i - \overline{z})\right\}^2$$

$\vdots$

$$\vec{w} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$$

$$= \underbrace{(\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z})}_{=D}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$V(w) = \|\vec{w}\|^2$$

$$= \left(D\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, D\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)$$

$$= \left({}^tDD\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)$$

$${}^tDD = \begin{pmatrix} {}^t\vec{x} \\ {}^t\vec{y} \\ {}^t\vec{z} \end{pmatrix} (\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z})$$

分散共分散

$$= \begin{pmatrix} \|\vec{x}\|^2 & (\vec{x},\vec{y}) & (\vec{x},\vec{z}) \\ (\vec{y},\vec{x}) & \|\vec{y}\|^2 & (\vec{y},\vec{z}) \\ (\vec{z},\vec{x}) & (\vec{z},\vec{y}) & \|\vec{z}\|^2 \end{pmatrix}$$

行列 $= \begin{pmatrix} V(x) & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{yx} & V(y) & C_{yz} \\ C_{zx} & C_{zy} & V(z) \end{pmatrix}$

2 変量

	x	y
	x_1	y_1
	$\vdots$	$\vdots$
i		
	x_n	y_n

a, b : 定数.

$$z = ax + by$$

$$\vec{z} = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} \vdots \\ ax_i + by_i - a\bar{x} - b\bar{y} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} \vdots \\ x_i - \bar{x} \\ \vdots \end{pmatrix} + \frac{b}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} \vdots \\ y_i - \bar{y} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= a\vec{x} + b\vec{y}.$$

$$\vec{x} = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_n - \bar{x} \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} y_1 - \bar{y} \\ \vdots \\ y_n - \bar{y} \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{x}\|^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = V(x)$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{x})$$

$$= C_{xy}$$ 共分散

$$= \|\vec{z}\|^2$$

$$V(z) = \|a\vec{x} + b\vec{y}\|^2$$

$$= \|a\vec{x}\|^2 + 2(a\vec{x}, b\vec{y}) + \|b\vec{y}\|^2$$

$$= a^2\|\vec{x}\|^2 + 2ab(\vec{x}, \vec{y}) + b^2\|\vec{y}\|^2$$

$$= a^2 V(x) + 2ab\, C_{xy} + b^2 V(y)$$

$$= \left((\vec{x}\ \vec{y})\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, (\vec{x}\ \vec{y})\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left({}^t(\vec{x}\ \vec{y})(\vec{x}\ \vec{y})\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} {}^t\vec{x} \\ {}^t\vec{y} \end{pmatrix}(\vec{x}\ \vec{y})\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\underbrace{\begin{pmatrix} \|\vec{x}\|^2 & \boxed{(\vec{x}, \vec{y})} \\ \boxed{(\vec{y}, \vec{x})} & \|\vec{y}\|^2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)$$

分散行列の定める2次形式

收益率

期首 $\longrightarrow$ 期末

$x \longmapsto x+\Delta x$

$1 \longmapsto 1+r$

$$\boxed{r = \frac{\Delta x}{x}}$$

收益率

$A_1 \quad x_1 \longmapsto x_1(1+r_{11})$

$A_2 \quad x_2 \longmapsto x_2(1+r_{12})$

$\vdots$

$A_j \quad x_j \longmapsto x_j(1+r_{1j})$

$\vdots$

$A_n \quad x_n \longmapsto x_n(1+r_{1n})$

$1 \longmapsto 1 + x_1 r_{11} + \cdots + x_j r_{1j} + \cdots + x_n r_{1n}$

第i期の收益率

$\overline{r_j} = \mu_j$ と書く.　L2

問題　条件 $g_1(\vec{x}) = 1 - x_1 - \cdots - x_n = 0$

目的関数 $g_2(\vec{x}) = \mu - \mu_1 x_1 - \cdots - \mu_n x_n = 0$　　$\mu = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n$　$\uparrow$ $\overline{R}$

の下で $f(x) = \frac{1}{2}V(R)$ を最小化すること.

(リターンのレベルが一定 μ の下でリスク $V(R)$ を最小化)

条件　① $\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$, $\vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると $\vec{\mu} \nparallel \vec{1}$

$V = {}^t(\vec{r_1} \cdots \vec{r_n})(\vec{r_1} \cdots \vec{r_n})$

はグラム行列

② $(V\vec{x}, \vec{x}) > 0$　$(\vec{x} \neq \vec{0})$

$(\vec{1}, \vec{x}) = 1$

$(\vec{\mu}, \vec{x}) = \mu$

②について　(i) 一般に A が $m \times n$ のとき.　V が定める2次形式は正定値.

$${}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA.$$

から ${}^tAA$ は対称行列.　(A のグラム行列と呼ぶ)

グラム行列

(ii)　$(({}^tAA)\vec{x}, \vec{x}) = (A\vec{x}, A\vec{x}) = \|A\vec{x}\|^2 \geq 0$

である. $({}^tAA\vec{x}, \vec{x}) > 0$　$(\vec{x} \neq \vec{0})$ であるためには.　= の条件.

$$A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

すなわち「$\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}$ が線型独立である」ことが必要十分である. よって条件②は

② $\Longleftrightarrow$ $\vec{r_1}, \dots, \vec{r_n}$ が線型独立である

を満たす.」

いくつか②について補足を必要とするが, そのときになったら解説しよう.

${}^tAA$ が2次形式として非負定値

$$({}^tAA\vec{x}, \vec{x}) \geqq 0 \quad (\forall \vec{x})$$

$$({}^tAA\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad (\vec{x} \neq \vec{0})$$

$$\Updownarrow$$

$$(A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0})$$

$$\Updownarrow$$

$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ は1次独立.

V が②を満たす $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n$ が1次独立.

$${}^t(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_n)\underbrace{(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_n)}$$

---

①について $\vec{\mu} \nparallel \vec{1}$ 　　 $\begin{vmatrix} \mu_i & 1 \\ \mu_j & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$$\begin{vmatrix} \mu_i & 1 \\ \mu_j & 1 \end{vmatrix} = \mu_i - \mu_j$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{a} \nparallel \vec{e} \\ \Updownarrow \\ \exists i, \exists j \ \begin{vmatrix} a_i & e_i \\ a_j & e_j \end{vmatrix} \neq 0. \end{array}}$$

一般に n次対称行列 A に対し

$$f(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x})$$

とすると

$$\nabla(f) = 2A\vec{x}$$
$$H(f) = 2A$$

に注意する。

$A = \begin{pmatrix} a & p & r \\ p & b & q \\ r & q & c \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ として確認する。

この注意を用いて Lagrange の未定乗数法を適用すると
$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ で極大(小)ならば

$$\begin{cases} \nabla(f) + \lambda_1 \nabla(g_1) + \lambda_2 \boxed{\nabla(g_2)} = \vec{0} & \cdots (3) \\ (\vec{1}, \vec{x}) = 1 & \cdots (4) \\ (\vec{\mu}, \vec{x}) = \mu & \cdots (5) \end{cases}$$

$= V\vec{x}$

を満たす $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ が存在する　これは

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2}(V\vec{x}, \vec{x})$$

$$\begin{cases} V\vec{x} \boxed{- \lambda_1 \vec{1}} \boxed{- \lambda_2 \vec{\mu}} = \vec{0} & (3)' \\ (\vec{1}, \vec{x}) = 1 & (4) \\ (\vec{\mu}, \vec{x}) = \mu & (5) \end{cases}$$

となる。　$(3)', (4), (5)$ を満たす $\lambda_1, \lambda_2, \vec{x}$ を求める。

<u>注意</u>　① から $(4), (5)$ を満たす $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ は $(n-2)$ 次元分ある。

$$g_1(\vec{x}) = -x_1 - \cdots - x_n + 1 = 0 \longrightarrow \nabla(g_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec{1}$$

$$g_2(\vec{x}) = -\mu_1 x_1 - \cdots - \mu_n x_n + \mu = 0$$

$$\longrightarrow \nabla(g_2) = \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ \vdots \\ -\mu_n \end{pmatrix} = -\vec{\mu}$$

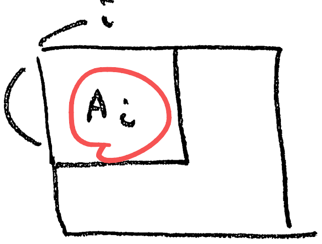
固有値 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

注意 一般に n 次対称行列 A に対して

$$(A\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad (\vec{x} \neq \vec{0})$$ 正定値.

$\Longleftrightarrow$ A の固有値 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n > 0$

$\Longleftrightarrow$ $|A_1| = a_{11} > 0,\ |A_2| > 0,\ \cdots,\ |A_n| = |A| > 0$



A_i を A の主座小行列 i と呼ぶ。 i 次.

A:正則

② から V は正則である.

- ② から $|V| > 0$ が分かる.
- V が正則でないとすると $\exists \vec{x} \neq \vec{0}$ に対して $V\vec{x} = \vec{0}$ となるが (注)

非自明解.

$$(V\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{0}, \vec{x}) = 0$$

となり矛盾が生じる (② に反する)

$(V\vec{x}, \vec{x}) > 0 \ (\vec{x} \neq \vec{0})$

---

(3)′ から

$$V\vec{x} = (\vec{1}\ \vec{\mu})\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{pmatrix}$$

となるが V は正則なので

$$\vec{x} = V^{-1}(\vec{1}\ \vec{\mu})\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{pmatrix}$$

となる. さらに (4), (5) を用いて λ_1, λ_2 を求めよう.

(注) A: n 次正方行列に対して A: 正則 $\Longleftrightarrow$ $(A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0})$

$\Longleftrightarrow$ $|A| \neq 0$

Log

問題

$$\begin{array}{c|ccc} & A_1 & \cdots & A_n \\ \hline & x_1 & \cdots & x_n \\ \text{1時期} & r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \vdots & & \\ \text{N時期} & r_{N1} & \cdots & r_{Nn} \end{array}$$

$\rightarrow 1 = x_1 + \cdots + x_n$

$\rightarrow \cdots \rightarrow R = r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n$

制約条件

$$g_1(x) = 1 - x_1 - \cdots - x_n = 0$$

$$g_2(x) = \mu - \mu_1 x_1 - \cdots - \mu_n x_n = 0$$

$\mu_j = \overline{r_j}$

$\mu = \overline{R} = x_1\mu_1 + \cdots + x_n\mu_n$

の下で $f(x) = \frac{1}{2}(V\vec{x}, \vec{x})$ を最小化。

$= \frac{1}{2}V(R)$

---

① $\vec{1} \nparallel \vec{\mu}$

② $(V\vec{x}, \vec{x}) > 0$ 　$\vec{x} \neq \vec{0}$

$\rightarrow V$：正定値

未定乗数法

$\vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$

$\exists \lambda_1 \exists \lambda_2$

$$\begin{cases} V\vec{x} = \boxed{(\vec{1}\ \vec{\mu})} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \\ (\vec{1}, \vec{x}) = 1 \\ (\vec{\mu}, \vec{x}) = \mu \end{cases}$$

$F = (\vec{1}\ \vec{\mu})$

制約条件

$$\vec{x} = V^{-1}(\vec{1}\ \vec{\mu})\boxed{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}}$$

$$= V^{-1}F\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

以下 $F = (\vec{1}\ \vec{\mu})$ とおく このとき

$$\vec{x} = V^{-1} F \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (6)$$

1行 → ${}^t\vec{1}\,\vec{x} = (\vec{1}, \vec{x}) = 1$

2行 → ${}^t\vec{\mu}\,\vec{x} = (\vec{\mu}, \vec{x}) = \mu$

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$
$(\vec{a}, \vec{b}) = {}^t\vec{a}\,\vec{b}$

なので

$$\begin{pmatrix} {}^t\vec{1} \\ {}^t\vec{x} \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}$$ $\vec{\mu}$

従って ${}^tF\,\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}$

${}^tF\cdot$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix} = {}^tF\,\vec{x} = {}^tF\,V^{-1}F \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

↑ (6)

となるが

$${}^tF\,V^{-1}F = \begin{pmatrix} {}^t\vec{1} \\ {}^t\vec{\mu} \end{pmatrix} V^{-1} (\vec{1}\ \vec{\mu}) = \begin{pmatrix} {}^t\vec{1}\,V^{-1}\vec{1} & {}^t\vec{1}\,V^{-1}\vec{\mu} \\ {}^t\vec{\mu}\,V^{-1}\vec{1} & {}^t\vec{\mu}\,V^{-1}\vec{\mu} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {}^t\vec{1} \\ {}^t\vec{\mu} \end{pmatrix} (V^{-1}\vec{1}\ \ V^{-1}\vec{\mu})$$

から

$$\begin{pmatrix} {}^t\vec{1}\,V^{-1}\vec{1} & {}^t\vec{1}\,V^{-1}\vec{\mu} \\ {}^t\vec{\mu}\,V^{-1}\vec{1} & {}^t\vec{\mu}\,V^{-1}\vec{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}$$

が解ければよい

$${}^t\vec{\mu}\,V^{-1}\vec{1} = {}^t\vec{1}\,V^{-1}\vec{\mu}$$

注) 一般に A が正則で対称とすると A^{-1} も対称である

$AX = I_n$ $\quad A^{-1} = X$

V: 対称 正則

の転置をとると ${}^tA = A$

V^{-1} も対称.

$$I_n = {}^tX\,{}^tA = {}^tX\,A$$

A 正則
A^{-1}.

から

$$A^{-1} = {}^tX = {}^t(A^{-1})$$

→ A^{-1} は対称

$$\boxed{{}^t\vec{1}\,V^{-1}\vec{\mu} = {}^t\vec{\mu}\,V^{-1}\,\vec{1}}$$

1×1

${}^t a = a$

$${}^t({}^t\vec{1}\,V^{-1}\,\vec{\mu}) = {}^t\vec{\mu}\;{}^t(V^{-1})\;{}^t({}^t\vec{1})$$

$$\| $$

$${}^t\vec{1}\,V^{-1}\,\vec{\mu}$$

$$= {}^t\vec{\mu}\,V^{-1}\,\vec{1}$$

└ V^{-1} 対称.

$${}^t(ABC) = {}^tC\,{}^tB\,{}^tA$$

$${}^tV^{-1} = V^{-1}$$

$${}^t({}^tF\,V^{-1}\,F) = {}^tF\;{}^t(V^{-1})\;{}^t({}^tF) = {}^tF\,V^{-1}\,F$$

${}^tF\,V^{-1}\,F$ は対称.

V^{-1}は対称であるが、

$$ {}^t({}^tFV^{-1}F) = {}^tF\,{}^tV^{-1}\,{}^t({}^tF) $$
$$ = {}^tFV^{-1}F $$

から ${}^tFV^{-1}F$ も対称である。 具体的には、

$\rightarrow$ ${}^t\vec{1}V^{-1}\vec{\mu} = {}^t\vec{\mu}V^{-1}\vec{1}$

を示すのにすごく面倒なことをしたが、この V^{-1}

$$ (\text{左}) = (\vec{1}, V^{-1}\vec{\mu}) = ({}^t(V^{-1})\vec{1}, \vec{\mu}) $$
$$ = (V^{-1}\vec{1}, \vec{\mu}) = (\vec{\mu}, V^{-1}\vec{1}) $$
$$ \| $$
$$ {}^t\vec{\mu}V^{-1}\vec{1} $$

としてもよい。

さらに 対称な ${}^tFV^{-1}F$ の定める2次形式が正定値であることを示す。そのためには まず V^{-1} が定める2次形式が正定値であることを示す。

簡単に示すと $\vec{x} \neq \vec{0}$ であるとき $V^{-1}\vec{x} = \vec{y}$ とおくと　V正則。

$\vec{x} = V\vec{y}$ で $\vec{y} \neq \vec{0}$ となるので

$\vec{y} \neq \vec{0}$

$$ (V^{-1}\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{y}, V\vec{y}) = (V\vec{y}, \vec{y}) > 0 $$

から分かる（この内容はいろいろと補足が必要となるが後述としよう）

条件①から $\vec{1} \nparallel \vec{\mu}$ なので

$$ F\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = (\vec{1}\ \vec{\mu})\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{0} $$

従って $\boxed{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ ならば } F\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}}$

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ 　　　 Aの固有値 $\alpha, \beta > 0$

$\Leftrightarrow$

$\rightarrow$ $\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) > 0$ $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}\right)$

$\Updownarrow$

$\boxed{A = {}^tFV^{-1}F}$ 　 $a > 0$, $|A| > 0$

$\uparrow$

V^{-1}が正定値の
2次形式になる

$\uparrow$

② $(V\vec{x}, \vec{x}) > 0$
$(\vec{x} \neq \vec{0})$

$\vec{c} \neq \vec{0}$ とすると $F\vec{c} \neq \vec{0}$ なので

$$({}^tFV^{-1}F\vec{c}, \vec{c}) = (V^{-1}F\vec{c}, F\vec{c}) > 0 \quad \leftarrow F\vec{c} \neq \vec{0}$$

この必要十分条件は $\quad {}^tFV^{-1}F = \begin{pmatrix} C & \boxed{A} \\ \boxed{A} & B \end{pmatrix}$ とすると

$$C > 0, \quad \begin{vmatrix} C & A \\ A & B \end{vmatrix} > 0$$

である. 以上から

$$\boxed{({}^t\vec{1}, V^{-1}\vec{1}) > 0, \quad \begin{vmatrix} \boxed{{}^t\vec{1}V^{-1}\vec{1}} & {}^t\vec{1}V^{-1}\vec{\mu} \\ {}^t\vec{\mu}V^{-1}\vec{1} & {}^t\vec{\mu}V^{-1}\vec{\mu} \end{vmatrix} > 0}$$

が示された.

$$\boxed{\begin{aligned} C &= {}^t\vec{1}V^{-1}\vec{1} \\ &= (V^{-1}\vec{1}, \vec{1}) \\ &> 0 \end{aligned}}$$

$$\begin{pmatrix} C & A \\ A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}}$$

を解くと $\quad \Delta = CB - A^2 > 0$ として

クラメール

$$\lambda_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & A \\ \mu & B \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}(B - \mu A)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} C & 1 \\ A & \mu \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}(C\mu - A)$$

$$\vec{x} = V^{-1}(\vec{1}\ \vec{\mu})\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 V^{-1}\vec{1} + \lambda_2 V^{-1}\vec{\mu}$$

従って

$$\vec{x} = \boxed{\frac{B - A\mu}{\Delta}} V^{-1}\vec{1} + \boxed{\frac{C\mu - A}{\Delta}} V^{-1}\vec{\mu}$$

であることが分かる. 実際

$$\begin{aligned} \vec{x} &= V^{-1}F\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = V^{-1}(\vec{1}\ \vec{\mu})\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= V^{-1}(\lambda_1\vec{1} + \lambda_2\vec{\mu}) \\ &= \lambda_1 V^{-1}\vec{1} + \lambda_2 V^{-1}\vec{\mu} \end{aligned}$$

$$\boxed{V\vec{x} = F\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}}$$

注　実は ② から $V(R)$ は この $\vec{x}$ で 制約条件の下で 最小値をとる ~~ことが分かる.~~

後で述べ

このとき、

$$\sigma^2 := V(R) = (V\vec{x}, \vec{x})$$

$$= \left(F\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}, V^{-1}F\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}, {}^tFV^{-1}F\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}, \boxed{\begin{pmatrix}1\\ \mu\end{pmatrix}}\right) = \lambda_1 + \lambda_2\mu$$

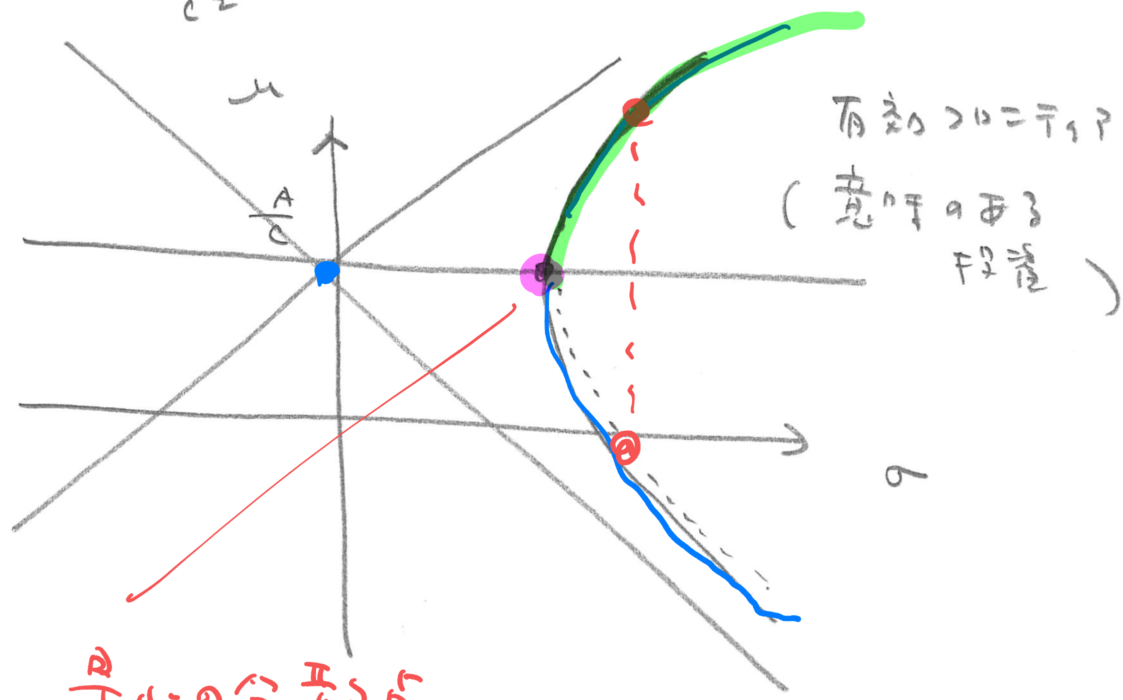
$$= \frac{B - A\mu}{\Delta} + \mu\frac{C\mu - A}{\Delta}$$

$$= \frac{C}{\Delta}\underbrace{\left(\mu - \frac{A}{C}\right)^2}_{\geq 0} + \frac{1}{C}$$

すなわち

$$\frac{\sigma^2}{\frac{1}{C}} - \frac{(\mu - \frac{A}{C})}{\frac{\Delta}{C^2}} = 1$$

（ここで $\Delta, C > 0$ に注意しよう）



最小分散点