ポートフォリオ理論（補足）

定理　$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$　C^2 級

$$g_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\vec{x} \longmapsto (\vec{a}, \vec{x}) - \alpha$$

$$g_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\vec{x} \longmapsto (\vec{b}, \vec{x}) - \beta$$

は

(1)　$(H(f)(P)\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad (P \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \neq \vec{0})$

(2)　$\vec{a} \nparallel \vec{b}$

を満たす　$P_0 \in \mathbb{R}^n$ が

- $\exists \lambda\ \exists \mu \quad \nabla(f)(P_0) + \lambda \nabla(g_1)(P_0) + \mu \nabla(g_2)(P_0) = \vec{0}$
- $g_1(P_0) = g_2(P_0) = 0$

を満たす。

このとき 制約条件 $g_1(P) = g_2(P) = 0$ を満たす P_0 と異なる P

に対して

$$f(P) > f(P_0)$$

が成立する

(証明) 以下 P を $\vec{x}$, P_0 を $\vec{x}_0$ で表す.

$$\vec{x}_t = (1-t)\vec{x}_0 + \vec{x} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

とすると

$$g_1(\vec{x}_t) = (\vec{a}, (1-t)\vec{x}_0 + t\vec{x}) - \alpha$$
$$= (1-t)(\vec{a}, \vec{x}_0) + t(\vec{a}, \vec{x}) - \alpha$$
$$= (1-t)\cdot\alpha + t\cdot\alpha - \alpha = 0$$

$$g_2(\vec{x}_t) = \quad \cdots \quad = 0$$

から $\vec{x}_t$ の表す点 P_t は 制約条件

$$g_1(P_t) = g_2(P_t) = 0$$

を満たす.

$$F(t) := f(\vec{x}_t), \quad \vec{p} = \vec{x} - \vec{x}_0$$

とすると

$$F'(t) = (\nabla(f)(P_t), \vec{p})$$

特に $$F'(0) = (\nabla(f)(P_0), \vec{p})$$

$$= (-\lambda\vec{a} - \mu\vec{e}, \vec{p}) = -\lambda(\vec{a}, \vec{p}) - \mu(\vec{e}, \vec{p}) = 0$$

さらに

$$F''(t) = (H(f)(P_t)\vec{p}, \vec{p}) > 0$$

が $\vec{p} = \vec{x} - \vec{x}_0 \neq \vec{0}$ から従う。よって $t \neq 0$ のとき

$$F(t) > F(0)$$

特に $t = 1$ のとき

$$F(1) > F(0) \quad \text{すなわち} \quad f(P) > f(P_0)$$