凸関数（1変数）

emath, intro 2020

戸瀬信之

復習　I を開区間とします．$I=(A,B)$ でも構いません．

定理1　2階微分可能な $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ があるとします．

(1)　$f''(t) > 0 \quad (t \in I)$ が成立するならば，$t_0 \in I$ に対し

$$f(t) > f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \qquad \left(\begin{array}{c} t \neq t_0 \\ t \in I \end{array} \right)$$

(2)　$f''(t) \geqq 0 \quad (t \in I)$ が成立するならば

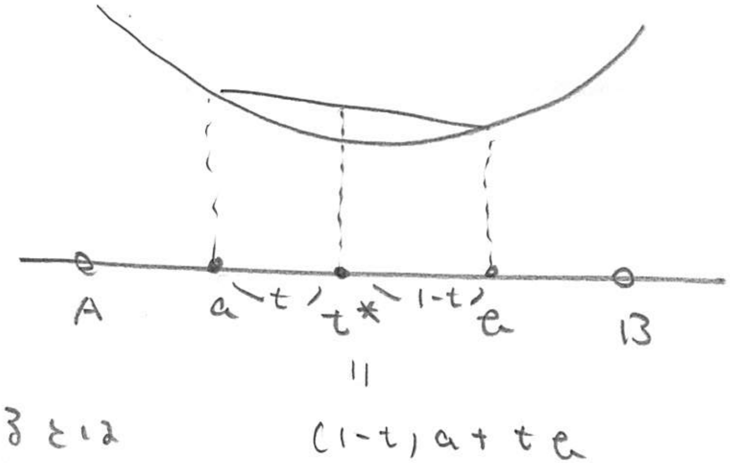
$$f(t) \geqq f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \qquad (t \in I)$$

定義 (1) $f: I \to \mathbb{R}$ が凸関数であるとは

$a, b \in I$ が $a < b$ を満たすならば

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + t f(b)$$

$$(0 \leq t \leq 1)$$



(2) $f: I \to \mathbb{R}$ が狭義の凸関数であるとは
(strictly convex)

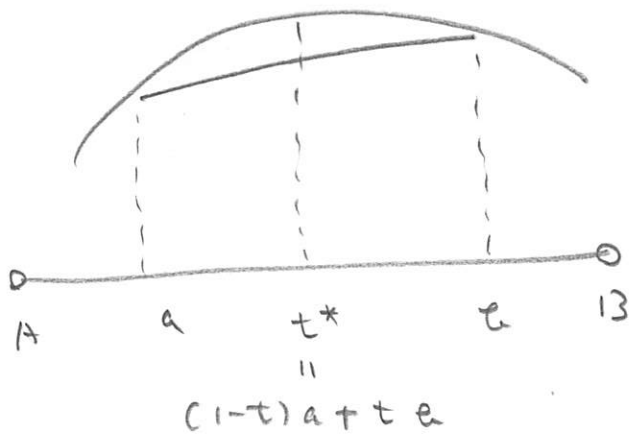
$a, b \in I$ が $a < b$ を満たすならば

$$f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + t f(b) \quad (0 < t < 1)$$

定義 (1) $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ が凹関数であるとは
(concave)

$a, b \in I$ が $a < b$ を満たすならば

$$f((1-t)a + tb) \geq (1-t)f(a) + tf(b)$$
$$(0 \leq t \leq 1)$$



(2) $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ が狭義の凹関数である

とは

$a, b \in I$ が $a < b$ を満たすならば

$$f((1-t)a + tb) > (1-t)f(a) + tf(b)$$
$$(0 < t < 1)$$

定理2 $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ が2階微分可能とする.

このとき

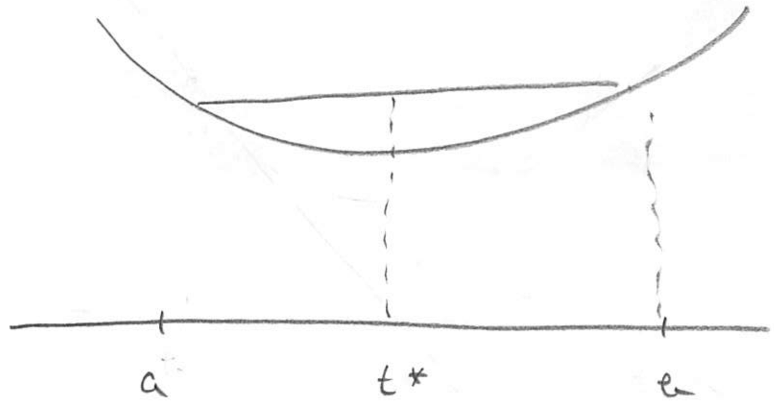
(1) $f''(t) \geqq 0 \ (t \in I) \Longrightarrow$ fは凸関数

(1)' $f''(t) \leqq 0 \ (t \in I) \Longrightarrow$ fは凹関数

(2) $f''(t) > 0 \ (t \in I) \Longrightarrow$ fは狭義凸関数

(2)' $f''(t) < 0 \ (t \in I) \Longrightarrow$ fは狭義凹関数.

(1) のみ示します。$a, b \in I$ が $a<b$ を満たすとします。定理1を $0<t<1$ を満たす t を用いて $t_0 = t^* = (1-t)a + tb$ に対して適用します。



$$f(t) \geq f(t^*) + f'(t^*)(t-t^*)$$

$$(t \neq t^*)$$

特に $a \neq t^*$, $b \neq t^*$ が $0<t<1$ から従うので

$$f(a) \geq f(t^*) + f'(t^*)(a-t^*) \qquad (1)$$

$$f(b) \geq f(t^*) + f'(t^*)(b-t^*) \qquad (2)$$

(1) × (1−t) + (2) × t は

$$(1-t)f(a) + tf(b) \geq (1-t)f(t^*) + tf(t^*) + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\boxed{\begin{array}{l}(1-t)f'(t^*)(a-t^*) \\ +\, t f'(t^*)(b-t^*)\end{array}}}}$$

$$= f(t^*) = f((1-t)a + tb)$$

定理2の(1),(2)は逆が成立する.

<u>定理3.</u> $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ が2階微分可能とする.

f が I で 凸 (凹) ならば $f''(t) \geqq 0$ $(t \in I)$

(resp. $f''(t) \leqq 0$ $(t \in I)$)

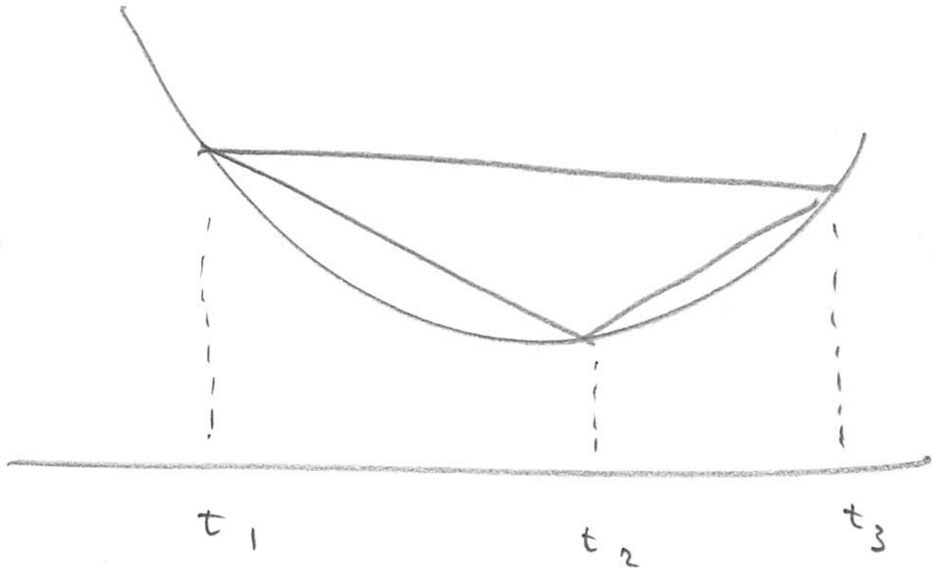
定理3を示すために以下を必要とします（定理4の証明はCT）

定理4　$f: I \to \mathbb{R}$ に対し

f が 凸 $\iff$ t_1, t_2, t_3 が

$t_1 < t_2 < t_3$

を満たすならば



$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} \underset{(*)}{\leq} \frac{f(t_3)-f(t_1)}{t_3-t_1} \underset{(\#)}{\leq} \frac{f(t_3)-f(t_2)}{t_3-t_2}$$

（定理4 終）

ここで $t_2 \to t_1+0$ とすると $(*)$ から $f'(t_1) \leq \dfrac{f(t_3)-f(t_1)}{t_3-t_1}$

$t_2 \to t_3-0$ とすると $(\#)$ から

$$\frac{f(t_3)-f(t_1)}{t_3-t_1} \leq f'(3)$$

結論① f が微分可能で凸 $\Rightarrow$ f' は広義の単調増加

定理5 g が微分可能で広義の単調増加 $\Rightarrow$ $g' \geqq 0$

（定理5の証明） $a < t$ とすると $g(a) \leqq g(t)$ 従って $g(t) - g(a) \geqq 0$

$$\frac{g(t) - g(a)}{t - a} \geqq 0$$

$t \to a+0$ とすると

$$g'(a) \geqq 0.$$

定理5から f が2階微分可能で凸 $\Rightarrow$ $f'' \geqq 0$

演習

$f(t) = t^4 \ (t \in \mathbb{R})$ は狭義の凸であることを示せ.

(注) $f''(t) = 12t^2$ で $f''(0) = 0$