凸関数（1変数）

emath, intro 2020

戸瀬信之

- 下に凸，上に凸
  $f'' > 0 \to \cdots$

- 2変数の凸関数
  (3)
  → 基礎として1変数凸関数.

復習　I は開区間とします．I = (A, B) でも構いません．

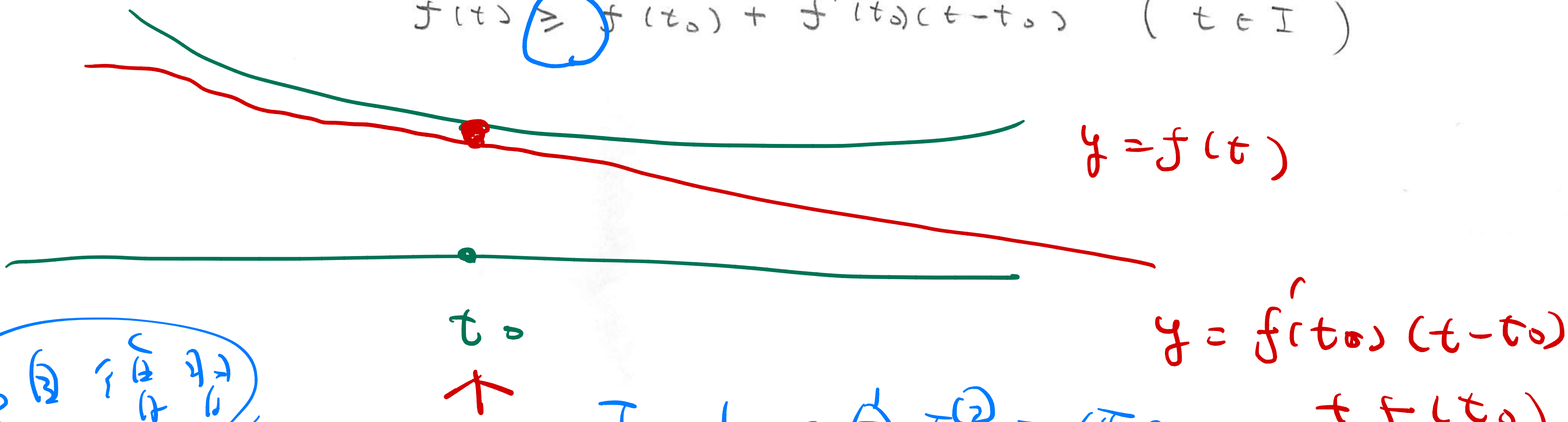
定理1　2階微分可能な $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ があるとします．

(1)　$f''(t) > 0 \quad (t \in I)$ が成立するならば，$t_0 \in I$ に対し

$$f(t) > f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \qquad \left(\frac{t \neq t_0}{t \in I}\right)$$

(2)　$f''(t) \geq 0 \quad (t \in I)$ が成立するならば

$$f(t) \geq f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \qquad (t \in I)$$



各自復習

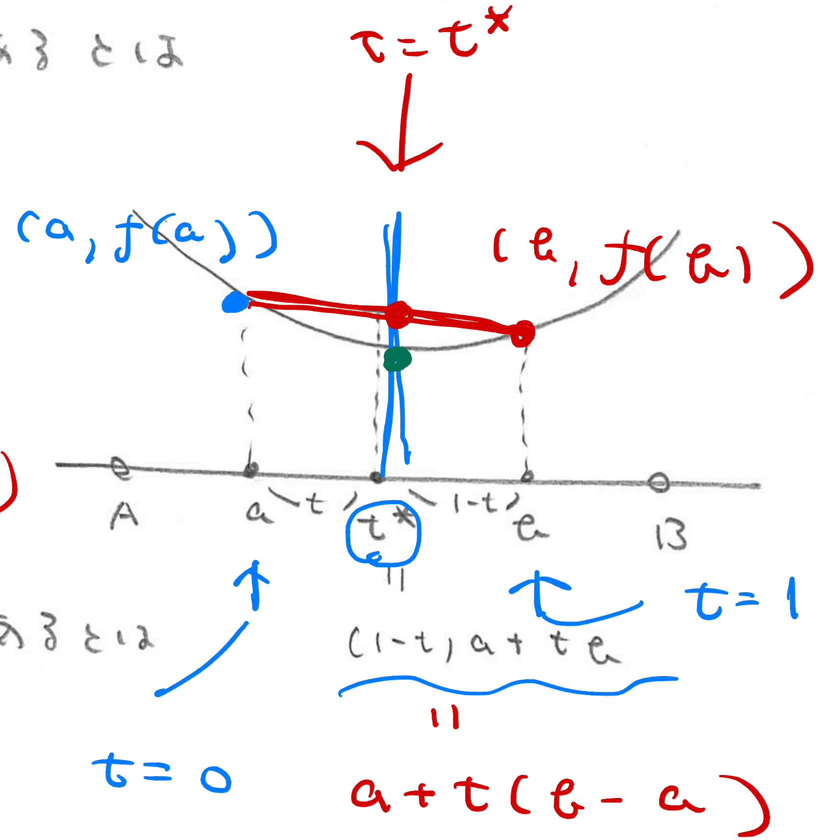
Taylorの定理を使う．

定義 (1) $f: I \to \mathbb{R}$ が凸関数であるとは

$a, b \in I$ が $a < b$ を満たすならば

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + t f(b)$$

$$(0 \leq t \leq 1) \to (0 < t < 1)$$



(2) $f: I \to \mathbb{R}$ が狭義の凸関数であるとは
(strictly convex)

$a, b \in I$ が $a < b$ を満たすならば

$$f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + t f(b) \quad (0 < t < 1)$$

$t = 0, 1$ で $=$ が成立

$t=0$ $f(a) = f(a)$, $t = 1$ $f(b) = f(b)$

定義 (1) $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ が凹関数であるとは
(concave)

$a, b \in I$ が $a < b$ を満たすならば

$$f((1-t)a + tb) \geq (1-t)f(a) + tf(b)$$

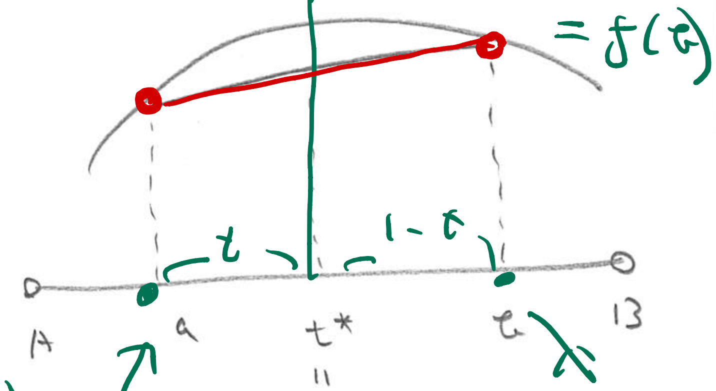
$(0 \leq t \leq 1)$

$(0 < t < 1)$ でもよい.

注

$t = 0, 1$ で常に成立

$f(a) = f(a)$, $f(b) = f(b)$



$t^* = (1-t)a + tb = a + t(b-a)$

$t = 0$

$t = 1$

(2) $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ が狭義の凹関数である

とは

$a, b \in I$ が $a < b$ を満たすならば

$$f((1-t)a + tb) > (1-t)f(a) + tf(b)$$

$(0 < t < 1)$

定理2 $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ が2階微分可能とする。

このとき

(1) $f''(t) \geqq 0 \ (t \in I) \Longrightarrow f$ は凸関数

(1)' $f''(t) \leqq 0 \ (t \in I) \Longrightarrow f$ は~~凸~~凹関数

(2) $f''(t) > 0 \ (t \in I) \Longrightarrow f$ は狭義凸関数

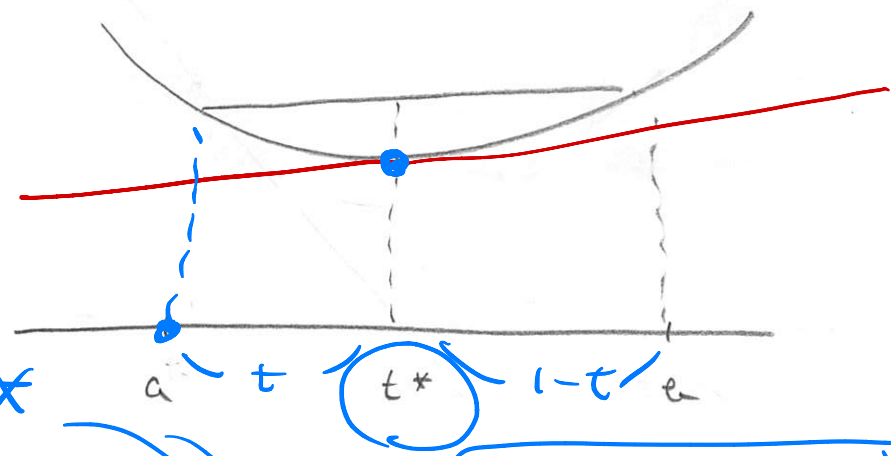
$\Longleftarrow$ ×

(2)' $f''(t) < 0 \ (t \in I) \Longrightarrow f$ は狭義凹関数

$\Longleftarrow$ ×

$f''(t) \geq 0 \ (t \in I)$

(1) のみ示します. $a, b \in I$ が $a < b$ を満たすとします. 定理1を $0 < t < 1$ を満たす t を用いて $t_0 = t^* = (1-t)a + tb$ にあてはめて適用します.



$$f(t) \geq f(t^*) + f'(t^*)(t - t^*) \quad (t \neq t^*)$$

$t = t^*$ のとき $=$ は OK.

特に $a \neq t^*$, $b \neq t^*$ が $0 < t < 1$ から従うので

$t = a$, $t = b$

$$f(a) \geq f(t^*) + f'(t^*)(a - t^*) \quad (1)$$

$$f(b) \geq f(t^*) + f'(t^*)(b - t^*) \quad (2)$$

(1) × $(1-t)$ + (2) × t は　$1 - t \geq 0$, $t \geq 0$.

$$(1-t)f(a) + t f(b) \geq (1-t) f(t^*) + t f(t^*) + \boxed{(1-t) f'(t^*)(a - t^*) + t f'(t^*)(b - t^*)}$$

$$= f(t^*) = f((1-t)a + tb)$$

$$(1-t)(a - t^*) + t(b - t^*) = 0$$

着目

定理2の(1), ~~(2)~~ (1)' は逆が成立する.

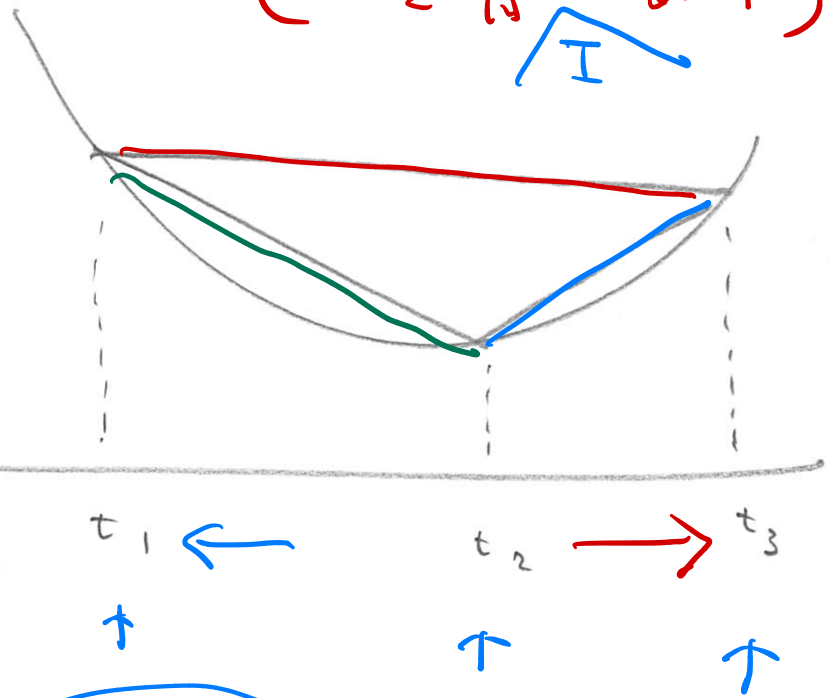
定理3.　$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ が2階微分可能とする.

f が I に 凸 (resp. 凹) ならば　$f''(t) \geqq 0 \quad (t \in I)$

(resp. $f''(t) \leqq 0 \quad (t \in I)$)

定理3を示すために以下を必要とします（定理4の証明はCT）

（復習にあり）



定理4 $f: I \to \mathbb{R}$ において

fが凸 $\iff$ t_1, t_2, t_3 が

$t_1 < t_2 < t_3$

を満たすならば

t_2に依らない

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} \underset{(*)}{\leq} \frac{f(t_3)-f(t_1)}{t_3-t_1} \underset{(\#)}{\leq} \frac{f(t_3)-f(t_2)}{t_3-t_2}$$

（定理4 終）

ここで $t_2 \to t_1+0$ とすると (*)から $f'(t_1) \leq \dfrac{f(t_3)-f(t_1)}{t_3-t_1}$

$t_2 \to t_3-0$ とすると (#)から

$$\frac{f(t_3)-f(t_1)}{t_3-t_1} = \frac{f(t_3)-f(t_1)}{t_3-t_1} \leq f'(t_3)$$

$\leadsto$ $f(t_1) \leq f(t_3)$

結論① f が微分可能で凸 $\Rightarrow$ f' は広義の単調増加。

定理5 g が微分可能で広義の単調増加 $\Rightarrow$ $g' \geq 0$

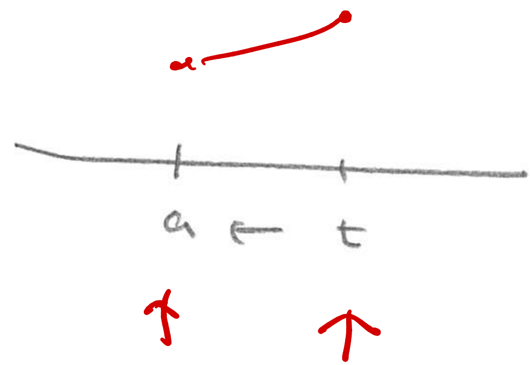
（定理5の証明）

$a < t$ とすると $g(a) \leq g(t)$ 従って $g(t) - g(a) \geq 0$

$$\frac{\boxed{g(t)-g(a)}}{\boxed{t-a}} \geq 0$$

≥ 0

> 0



$t \to a+0$ とすると

$g'(a) \geq 0$.

定理5から f が2階微分可能で凸 $\Rightarrow$ $f'' \geq 0$

$\rightarrow$ f' 広義単調増加

演習

$f(t) = t^4 \ (t \in \mathbb{R})$ は狭義の凸であることを示せ.

注 $f''(t) = 12t^2$ で $f''(0) = 0$