凸関数（2変数）

n変数

復習

$\mathbb{R}^2$の開集合U上のC^2級関数$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$

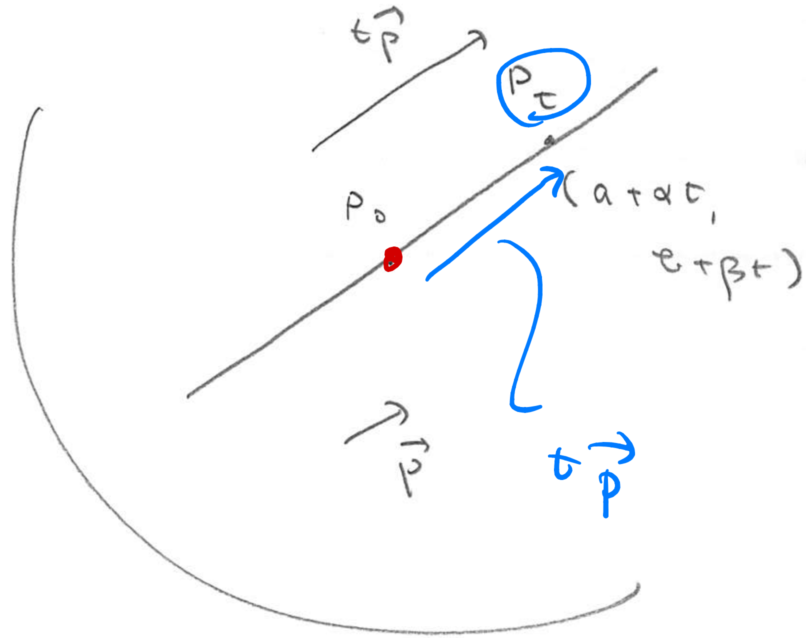
$P_0(a, b) \in U$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ とする

$$F(t) = f(a + \alpha t, b + \beta t)$$

とおくと $= f(\boxed{P_0 + t\vec{p}}) = P_t$

$$F'(t) = (\nabla(f)(P_t), \vec{p})$$

$$F''(t) = (H(f)(P_t)\vec{p}, \vec{p})$$



方向微分

Hesse行列の定める2次形式

$U(\subset \mathbb{R}^2)$は開で凸とする.　$A, B \in U \Rightarrow \overline{AB} \subset U$

定義(1) fが凸とは $A, B \in U : A \neq B$（相異なる2点）

に対して $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ とするとき　$\cancel{\vec{0}}$

$$\overrightarrow{AP_t} = t\vec{p}$$

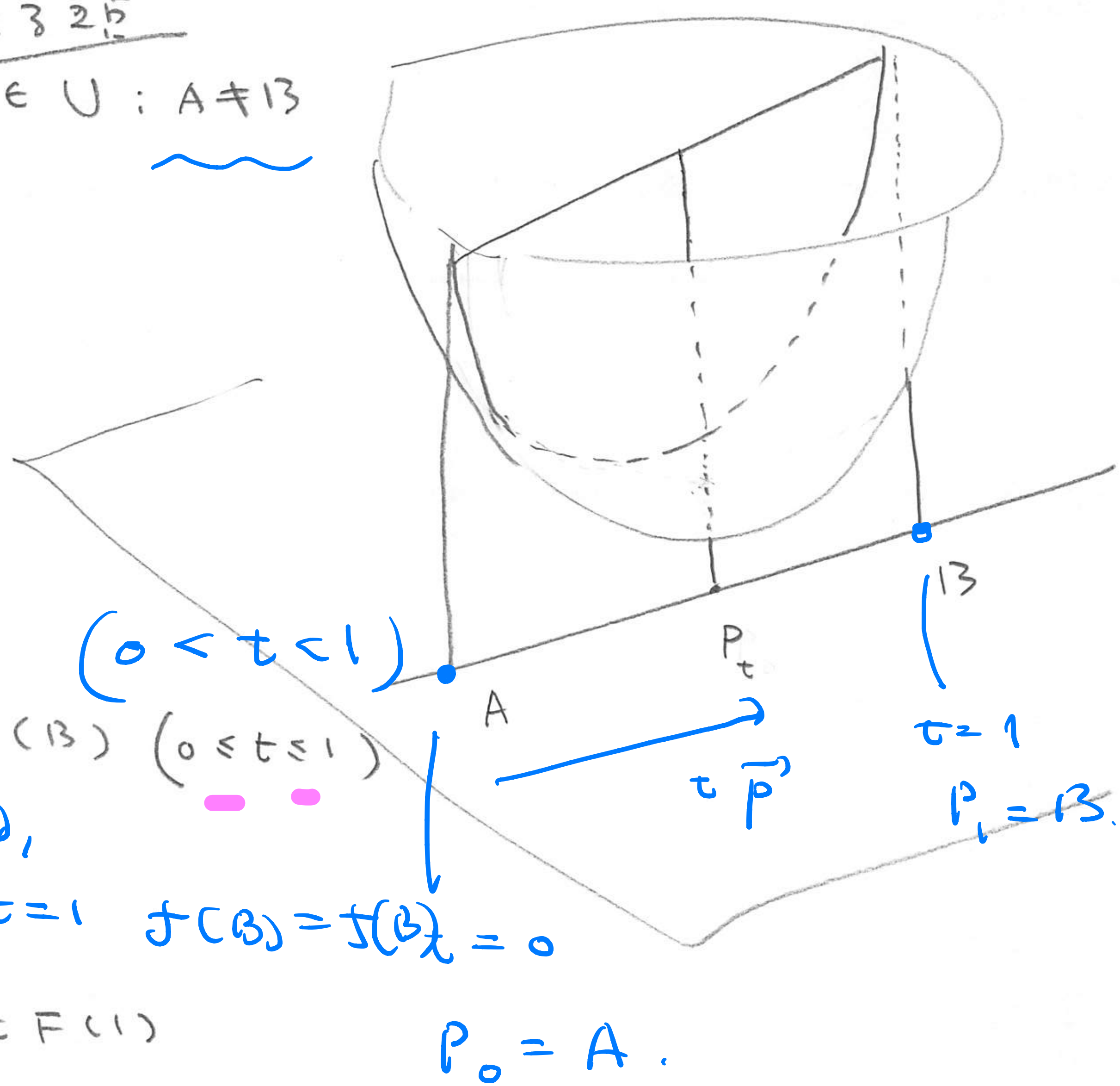
で定まる P_t を用いて

$$f(P_t) \leq (1-t)f(A) + t f(B) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$(0 < t < 1)$

$t=0$　$f(A) = f(A)$,

$t=1$　$f(B) = f(B)$



注) $F(t) = f(P_t)$ とすると

$$F(t) \leq (1-t)F(0) + tF(1)$$

が従うので F は凸関数.

(2) fが狭義凸とは

$$f(P_t) < (1-t)f(A) + tf(B) \quad (0 < t < 1)$$

(注) (1)と同様に $F(t) = f(P_t)$ とすると Fは狭義の凸

5

補足　A：2×2 で対称とする．$A=\begin{pmatrix} a & c \\ c & e \end{pmatrix}$

$(A\vec{v},\vec{v})\geqq 0\ (\vec{v}\in\mathbb{R}^2) \iff a,\ e\geqq 0,\ |A|\geqq 0$　注意 a_{11}, a_{12} 等も入っている

$\iff A$ の固有値 $\alpha,\beta\geqq 0$

2次形式は非負定値．

$(A\vec{v},\vec{v})>0\,(\vec{v}\neq\vec{0}) \iff a>0,\ |A|>0$

$\iff$ 固有値 $\alpha,\beta>0$．

定理 Uは$\mathbb{R}^2$の開凸集合として, $f: U \to \mathbb{R}$ はC^2級とする

(1) fはUで凸 $\Longleftrightarrow$ $f_{xx}(P),\ f_{yy}(P) \geq 0,$ $\det(H(f)(P)) \geq 0$ $(\forall P \in U)$

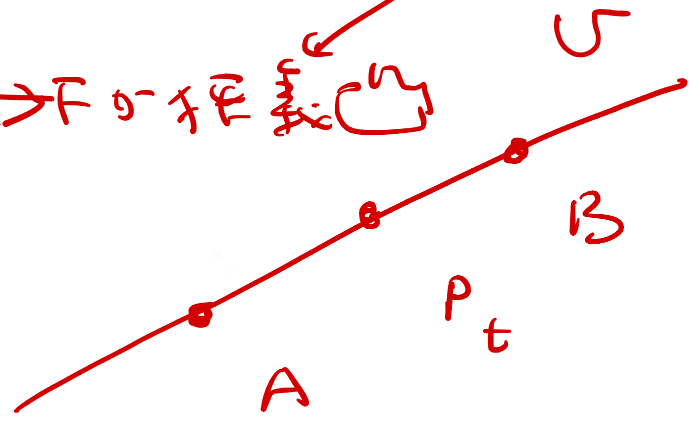
$\Updownarrow$

$A \neq B$に対して Fが凸

(2) $f_{xx}(P) > 0,$ $\det H(f)(P) > 0$ $(P \in U)$ $\Longleftarrow$ $F'' > 0$

A, B を A≠Bとしてとる

$\Longrightarrow$ fはUで狭義凸 $\Longleftrightarrow$ Fが狭義凸



$\Longleftrightarrow$ $(H(f)(P)\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$

$(P \in U,\ \vec{v} \in \mathbb{R}^2)$

$\vec{p} = AB.$

$F''(t) = (H(f)(P_t)\vec{p}, \vec{p}) \geq 0.$

定理　U 開凸集合 $(\subset \mathbb{R}^2)$　$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$

f が凸ならば　$(\forall a \in \mathbb{R})$

$$U_a := \{ P \in U ;\ f(P) \leq a \} \ni A, B.$$

$$V_a := \{ P \in U ;\ f(P) < a \}$$ ← 宿題

は凸集合.

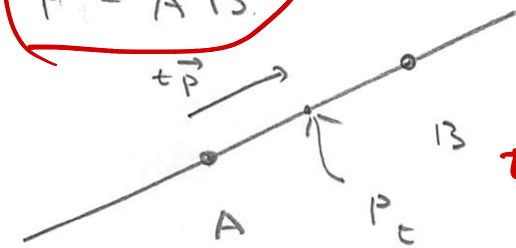
$A, B \in U_a$ とすると $f(A), f(B) \leq a$ となる. $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$

$A \neq B$.

$$\overrightarrow{AP_t} = t\vec{p}$$

として P_t を定めると　$0 \leq t \leq 1$ のとき

直線 AB 上.



$t=1$.

$t=0$

$$f(P_t) \leq (1-t)f(A) + t f(B)$$

$$\leq (1-t)a + ta = a$$

$1-t \geq 0$

$t \geq 0$.

から $P_t \in U_a$.　従って $\overline{AB} \subset U_a$　⟶ U_a は凸.