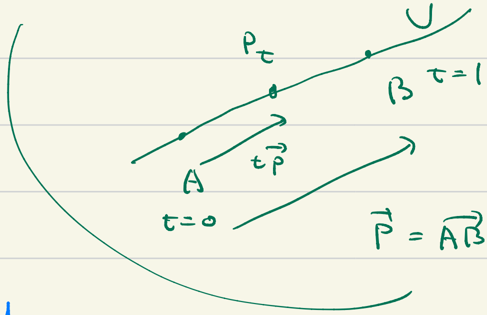
$U \subset \mathbb{R}^2$ 開, 凸　$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$

C^2 級.

f が 凹 関数

$A, B \in U$, $A \neq B$,

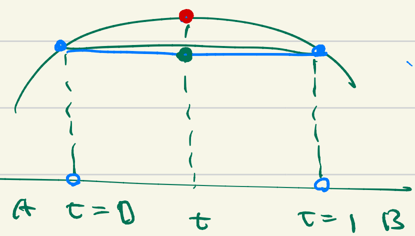
$f(P_t) = F(t)$



$0 < t < 1$

$F(t) \geq (1-t)F(0) + t\,F(1)$

$f(P_t) \geq (1-t)f(A) + t\,f(B)$



$\Longleftrightarrow$ $\left(H(f)(P)\vec{v}, \vec{v}\right) \leq 0$ $\left(P \in U, \vec{v} \in \mathbb{R}^2\right)$

$\Longleftrightarrow$ $f_{xx}(P) \leq 0$, $f_{yy}(P) \leq 0$.

$\Rightarrow$ $\det\left(H(f)(P)\right) \geq 0$. $(\forall P \in U)$

凹関数の応用 (費用の最小化)

$u : \mathbb{R}^2_{++} \longrightarrow \mathbb{R}$ 効用関数

C^2級

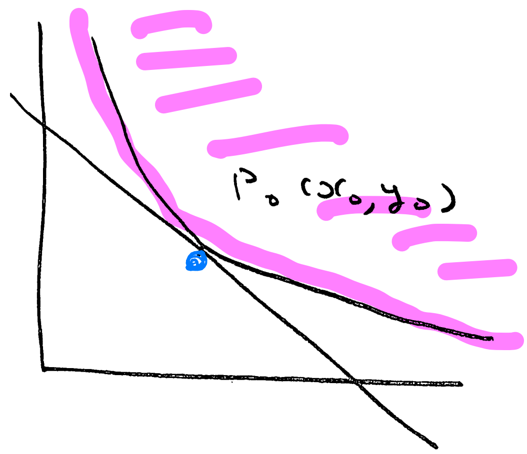
前提 ① $u_x(P),\ u_y(P) > 0 \quad (P \in \mathbb{R}^2_{++})$

② $\boxed{\begin{vmatrix} 0 & u_x(P) & u_y(P) \\ u_x(P) & & \\ u_y(P) & & H(u)(P) \end{vmatrix}} > 0 \quad (P \in \mathbb{R}^2_{++})$

注 このとき u は狭義の準~~凸~~ 凹

$\bar{u} - u(x,y) = 0$ の下で $g(x,y) = xp + yq$ を最小化する. $\exists \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} p - \mu\, u_x(P_0) = 0 \\ q - \mu\, u_x(P_0) = 0 \\ \bar{u} - u(P_0) = 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \quad px + qy > px_0 + qy_0$$

$$\left(\bar{u} - u(x,y) = 0,\ (x,y) \neq (x_0, y_0) \right)$$

であった.

---

② から陰関数定理が使えて

$$\begin{cases} p - \mu \cdot u_x(x,y) = 0 \\ q - \mu \cdot u_y(x,y) = 0 \\ \bar{u} - u(x,y) = 0 \end{cases} \quad \mu = \mu^*(p,q,\bar{u})$$

は解けて補償需要関数 $x = x^*(p,q,\bar{u})$, $y = y^*(p,q,\bar{u})$ を得る.

$x, y, \bar{u}$ について

最小支出関数

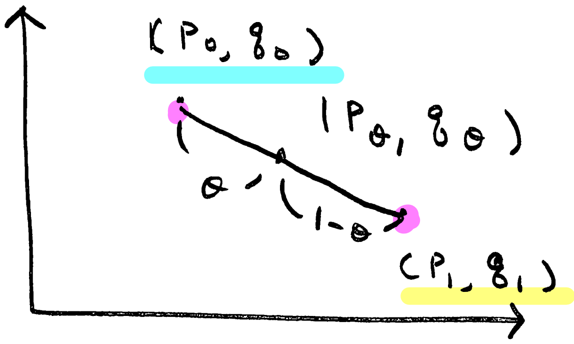
$$E(p, q, \bar{u}) = p\, x^*(p, q, \bar{u}) + q\, y^*(p, q, \bar{u})$$

を得る.

$\bar{u}$ を止めて p, q について考える

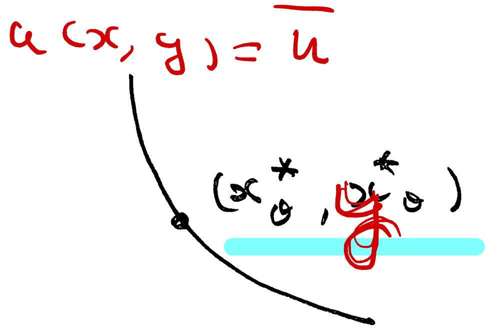
$$(p_\theta, q_\theta) = ((1-\theta) p_0 + \theta p_1,\ (1-\theta) q_0 + \theta q_1)$$

とする.



$$x^*_\theta = x^*(p_\theta, q_\theta, \bar{u})$$

$$y^*_\theta = y^*(p_\theta, q_\theta, \bar{u})$$



とおくと

$$u(x^*_\theta, y^*_\theta) = \bar{u}$$

← 制約条件を満たしているということ

$$E(p_\theta, q_\theta, \bar{u}) = p_\theta x^*_\theta + q_\theta y^*_\theta.$$

は

$$E(p_0, q_0, \bar{u}) \leq p_0 x^*_\theta + q_0 y^*_\theta$$

$$E(p_1, q_1, \bar{u}) \leq p_1 x^*_\theta + q_1 y^*_\theta$$

… E の定義から分かる.

$0<\theta<1$ のとき　$(1-\theta), \theta>0$ に注意する.

$$(1-\theta)E(p_0, q_0, \bar{u}) + \theta E(p_1, q_1, \bar{u})$$

$$\leq (1-\theta)p_0 x^*_\theta + (1-\theta)q_0 y^*_\theta$$

$$+\theta p_1 x^*_\theta + \theta q_1 y^*_\theta$$

$$= ((1-\theta)p_0 + \theta p_1)x^*_\theta + ((1-\theta)q_0 + \theta q_1)y^*_\theta$$

$$= p_\theta x^*_\theta + q_\theta y^*_\theta = E(p_\theta, q_\theta, \bar{u})$$

から　$E(p, q, \bar{u})$ は p, q について 凹

復

開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$, $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$

に対して

f が 凹 $\Leftrightarrow$ $f_{xx}(p), f_{yy}(p) \leq 0$

$\det H(f)(p) \geq 0$

$(p \in U)$

$E_{pp}, E_{qq} \leq 0$ が従う.

$E_p = x^*(p, q, \bar{u})$, $E_q = y^*(p, q, \bar{u})$

から

$$\boxed{\frac{\partial x^*}{\partial p} \leq 0, \quad \frac{\partial y^*}{\partial q} \leq 0}$$

が示される.