

Lagrange の未定乗数法 (その2)

戸瀬信之

December 06, 2017

制約条件付き極値問題

U を \mathbb{R}^2 の開集合とする. 2 関数

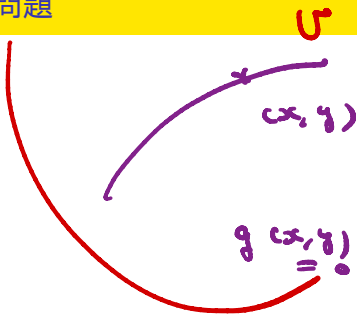
$$f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$$

が与えられているとき

問題

$g(x, y) = 0$ の下で $z = f(x, y)$ を極大化 (極小化) する

最大化, 最小化.



復習—定理

(a, b)

$$g(x, y) = 0$$

定理

$g(a, b) = 0, g_y(a, b) \neq 0$ を満たす $(a, b) \in U$ において制約条件付き極値問題が極大値（極小値）をとるとします。このとき次の (L) を満たす $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在します。

$$\begin{cases} f_x(a, b) + \lambda g_x(a, b) = 0 & (1) \\ f_y(a, b) + \lambda g_y(a, b) = 0 & (2) \\ g(a, b) = 0 & (3) \end{cases} \quad (L)$$

ここで (1) と (2) を接線条件と呼びます。

$$\nabla(f)(a, b)$$

$$\nabla(g)(a, b)$$

接線条件

(1), (2)

接線条件は

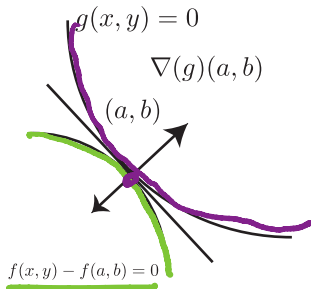
$$\nabla(g)(a, b) = -\lambda \cdot \nabla(f)(a, b)$$

と表せます。 $\nabla(f)(a, b)$ は f の等高線

$$f(x, y) - f(a, b) = 0$$

の (a, b) における法線ベクトルです。

2 曲線 $g(x, y) = 0$ と $f(x, y) - f(a, b) = 0$ は接線を共有しますから、
接していることが分かります。



制約条件付き極値問題—ミクロ経済学の例



$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

$$f(x, y) = 2x + y.$$

例 $I, p, q > 0$ とする。予算制約

$$I, p, q > 0.$$

$$g(x, y) = I - px - qy = 0 \quad (x, y > 0)$$

の下で効用関数

$$u(x, y) = \sqrt{xy}$$

を最大化する。この問題は第1財、第2財の価格が p, q のときに、予算 I をすべて支出して第1財を x 、第2財を y 購入して効用を最大化するという問題である。

$$u_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}, \quad u_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

$$g_x = -p, \quad g_y = -q$$

制約条件付き極値問題—ミクロ経済学の例 (2)

(x, y) で極大・極小であるとする

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} + \lambda(-p) = 0 & (1) \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \lambda(-q) = 0 & (2) \\ I - px - qy = 0 & (3) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在します。 (1) $\times x$, (2) $\times y$ を考えると

$$\sqrt{xy} = 2\lambda px = 2\lambda qy$$

であることが分かります。 (1) を考えると $\lambda \neq 0$ であることが分かりますから

$$\lambda = \frac{1}{2p} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \quad px = qy$$

さらに (3) から

$$px = qy = \frac{I}{2} \quad \text{従って} \quad x = \frac{I}{2p}, \quad y = \frac{I}{2q}$$

制約条件付き極値問題—ミクロ経済学の例 (3)

$$\rightarrow x(p, q, I) = \frac{I}{2p}, \quad y(p, q, I) = \frac{I}{2q}$$

を需要関数と呼びます。さらに (1) から Lagrange の未定乗数が

$$\lambda = \frac{1}{2p} \cdot \frac{\sqrt{\frac{I}{2q}}}{\sqrt{\frac{I}{2p}}} = \frac{1}{2\sqrt{pq}}$$

と求められます。この状況で $\lambda(p, q, I)$ を所得の限界効用と呼びます。

所得の限界効用

$$x = \frac{I}{2p}, \quad y = \frac{I}{2q}$$

$$u(x, y) = \sqrt{xy}$$

$$v(p, q, I) = u(x(p, q, I), y(p, q, I)) = \sqrt{\frac{I}{2p}} \cdot \sqrt{\frac{I}{2q}} = \frac{I}{2\sqrt{pq}}$$

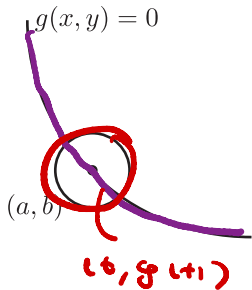
を間接効用関数と呼びます。 このとき

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \frac{1}{2\sqrt{pq}} = \lambda(p, q, I)$$

となります。これが $\lambda(p, q, I)$ が 所得の限界効用 と呼ばれる理由です。この等式

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \lambda(p, q, I)$$

は一般的に成立します。



$$g(a, b) = 0, \quad g_y(a, b) \neq 0$$

を仮定して、陰関数定理を適用する. (a, b)
の近くで

$$y = \varphi(x)$$

← *explicitな表現.*

と曲線 $g(x, y) = 0$ を表す.

陰関数

(a, b) で極大 (極小) ならば

$$F(t) = f(t, \varphi(t))$$

とすると $F'(a) = 0$ が従う. ← *必要.*

$$F''(a) > 0 \quad (\text{resp.} \quad F''(a) < 0)$$

ならば (a, b) で 極小 (resp. 極大) となります.

解法 (2)

$$F(t) = f(t, \varphi(t))$$

$$\varphi'(t) = -\frac{f_x(t, \varphi(t))}{f_y(t, \varphi(t))}$$

Chain Rule を使うと

$$F'(t) = f_x(t, \varphi(t)) \cdot 1 + f_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

もう一回微分.

$$F''(t) = f_{xx}(t, \varphi(t)) \cdot 1 + f_{xy}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

$$+ \varphi'(t) (f_{yx}(t, \varphi(t)) \cdot 1 + f_{yy}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t))$$

$$+ f_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi''(t)$$

$$= f_{xx}(t, \varphi(t)) + 2f_{xy}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) + f_{yy}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t)^2$$

$$+ f_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi''(t)$$



$$f_{xy} = f_{yx}.$$

解法 (3)

さらに $g(t, \varphi(t)) \equiv 0$ の両辺を t で微分して

答 $g_x(t, \varphi(t)) \cdot 1 + g_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \equiv 0$

$$g_{xx}(t, \varphi(t)) + 2g_{xy}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) + g_{yy}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t)^2 + g_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi''(t) \equiv 0$$

を得ます.

$$f''(a) = - \frac{1}{g_y(a, \varphi)} \left(g_{xx}(a, \varphi) + 2g_{xy}(a, \varphi) \cdot \frac{f'(a)}{g_y(a, \varphi)} + g_{yy}(a, \varphi) \frac{f'(a)^2}{g_y(a, \varphi)^2} \right)$$

解法 (4)

$t = a$ とするとき $P_0(a, b)$ と定めて

$$\varphi'(a) = -\frac{g_x(P_0)}{g_y(P_0)}$$

$$\varphi''(a) = -\frac{1}{g_y(a, b)} (g_{xx}(P_0) + 2g_{xy}(P_0) \cdot \varphi'(a) + g_{yy}(P_0) \cdot \varphi'(a)^2)$$

となります。

解法 (5)

$$P_0(a, b)$$

さらに

$$\begin{aligned} F''(a) &= f_{xx}(P_0) + 2f_{xy}(P_0) \cdot \varphi'(a) + f_{yy}(P_0) \cdot \varphi'(a)^2 \\ &\quad + f_y(P_0) \cdot \varphi''(a) \\ &= f_{xx}(P_0) + 2f_{xy}(P_0) \cdot \varphi'(a) + f_{yy}(P_0) \cdot \varphi'(a)^2 \\ &\quad - \frac{f_y(P_0)}{g_y(P_0)} (g_{xx}(P_0) + 2g_{xy}(P_0) \cdot \varphi'(a) + g_{yy}(P_0) \cdot \varphi'(a)^2) \\ &= L_{xx}(P_0, \lambda) + 2L_{xy}(P_0, \lambda) \cdot \varphi'(a) + L_{yy}(P_0, \lambda) \cdot \varphi'(a)^2 \end{aligned}$$

が成立します。ここで

$$\lambda = -\frac{f_y(P_0)}{g_y(P_0)}, \quad L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$$

としました。

解法 (6)

さらに

$$\begin{aligned}
 & \underline{F''(a)} \\
 &= L_{xx}(P_0, \lambda) + 2L_{xy}(P_0, \lambda) \cdot \left(-\frac{g_x(P_0)}{g_y(P_0)} \right) + L_{yy}(P_0, \lambda) \cdot \left(-\frac{g_x(P_0)}{g_y(P_0)} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{g_y(P_0)^2} \left(L_{xx}(P_0, \lambda) \cdot g_y(P_0)^2 - 2L_{xy}(P_0, \lambda) \cdot g_x(P_0)g_y(P_0) \right. \\
 & \quad \left. + L_{yy}(P_0, \lambda) \cdot g_x(P_0)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{g_y(P_0)^2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & g_x(a, b) & g_y(a, b) \\ g_x(a, b) & L_{xx}(a, b, \lambda) & L_{xy}(a, b, \lambda) \\ g_y(a, b) & L_{yx}(a, b, \lambda) & L_{yy}(a, b, \lambda) \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

定理

定理

$$\begin{cases} f_x(a, b) + \lambda g_x(a, b) = 0 & (1) \\ f_y(a, b) + \lambda g_y(a, b) = 0 & (2) \\ g(a, b) = 0 & (3) \end{cases} \quad (L)$$

$$F'(a) = 0$$

を満たす $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在するとします。さらに

$$B(a, b, \lambda) := \begin{vmatrix} 0 & g_x(a, b) & g_y(a, b) \\ g_x(a, b) & L_{xx}(a, b, \lambda) & L_{xy}(a, b, \lambda) \\ g_y(a, b) & L_{yx}(a, b, \lambda) & L_{yy}(a, b, \lambda) \end{vmatrix}$$

に対して $B(a, b, \lambda) < 0$ ならば (a, b) で極小となります。
 $B(a, b, \lambda) > 0$ ならば (a, b) で極大となります。ここで

$$F''(a) > 0$$

$$F''(a) < 0$$

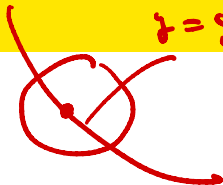
$$L(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

と定めています。

Lagrange の法則

$\varphi''(a)$ $f = f(x, y)$

$$\varphi'(a) = - \frac{g_x(P_0)}{g_y(P_0)}$$



$$\varphi''(a) = - \frac{1}{g_y(a, b)} (g_{xx}(P_0) + 2g_{xy}(P_0) \cdot \varphi'(a) + g_{yy}(P_0) \cdot \varphi'(a)^2)$$

$$= - \frac{1}{g_y(a, b)^3} (g_{xx}(P_0) \cdot g_y(P_0)^2 - 2g_{xy}(P_0) \cdot g_x(P_0)g_y(P_0) + g_{yy}(P_0) \cdot g_x(P_0)^2)$$

$$= \frac{1}{g_y(a, b)^3} \begin{vmatrix} 0 & g_x(a, b) & g_y(a, b) \\ g_x(a, b) & g_{xx}(a, b) & g_{xy}(a, b) \\ g_y(a, b) & g_{yx}(a, b) & g_{yy}(a, b) \end{vmatrix}$$

これが Hesse 行列式。 ←