効用関数のスケール変換・全縁部線定理

例1. $u(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$, $I - px - qy = 0$ の下で最大化.

(x, y) で極値をとるとき, ある $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{cases} \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} + \lambda(-p) = 0 \\ \frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{3}} + \lambda(-q) = 0 \\ I - px - qy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} = 3\lambda p & (1) \\ x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{3}} = \frac{3\lambda q}{2} & (2) \\ I - px - qy = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) × x, (2) × y から $3\lambda p x = \frac{3\lambda}{2} q y = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$

において $\lambda \neq 0$ ((1) に $\lambda = 0$ を代入して分かる) なので

$$px = \frac{1}{2} q y$$

となる. (3) から $px = \frac{1}{3} I$, $qy = \frac{2}{3} I$ すなわち $\begin{cases} x = \frac{I}{3p} \\ y = \frac{2I}{3q} \end{cases}$

例2. $U(x, y) = \log u(x) = \frac{1}{3}\log x + \frac{2}{3}\log y$, $I - px - qy = 0$ の下で最大化する.

(x, y) で極大値をとるとき, ある $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} + \lambda(-p) = 0 & (1) \\ \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{y} + \lambda(-q) = 0 & (2) \\ I - px - qy = 0 & (3) \end{cases}$$

(1), (2) から

$$x = \frac{1}{3p\lambda}, \quad y = \frac{2}{3q\lambda}$$

これを (3) に代入すると

$$I - \frac{1}{3\lambda} - \frac{2}{3\lambda} = I - \frac{1}{\lambda} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lambda = \frac{1}{I}$$

これから

$$x = \frac{I}{3p}, \quad y = \frac{2I}{3q}$$

一般論

$F'(u) > 0$, $U = F(u(x,y))$ とする

$$\begin{cases} u_x(a,b) + \lambda(-p) = 0 & (1) \\ u_y(a,b) + \lambda(-q) = 0 & (2) \\ I - pa - qb = 0 \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在すると仮定する.

$$U_x = F'(u(x,y))\, u_x,\quad U_y = F'(u(x,y)) \cdot u_y$$

$$U_x(a,b) = F'(u(a,b)) \cdot u_x(a,b)$$

$$U_y(a,b) = F'(u(a,b)) \cdot u_y(a,b)$$

なので (1), (2) に $F'(u(a,b))$ をかけると

$$\begin{cases} U_x(a,b) + F'(u(a,b))\lambda(-p) = 0 \\ U_y(a,b) + F'(u(a,b))\lambda(-q) = 0 \\ I - pa - qb = 0 \end{cases}$$

ここで $\Lambda = F'(u(a,b))\lambda$ とおくとよい. これから u と U が定める需要関数が同じであることが分かる.

$$z = f(x, y, \alpha) \text{ を } g(x, y, \alpha) = 0$$

の下で考える。$\alpha \in \mathbb{R}$ を止めて考えると $(x(\alpha), y(\alpha))$ で極値をとるならば

$\exists \lambda(\alpha) \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(\#)\begin{cases} f_x(x, y, \alpha) + \lambda(\alpha)\, g_x(x, y, \alpha) = 0 \\ f_x(x, y, \alpha) + \lambda(\alpha)\, g_y(x, y, \alpha) = 0 \\ g(x, y, \alpha) = 0 \end{cases}$$

が成立する。 $L = f + \lambda g$ と Lagrange 関数を定めると

$$L_x = L_y = L_\lambda = 0$$

となるので

$$\begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & g_x \\ L_{yx} & L_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

が成立するならば陰関数定理から

$$x = x(\alpha),\ y = y(\alpha),\ \lambda = \lambda(\alpha)$$

と (#) は解ける

$$F(\alpha) = f(x(\alpha), y(\alpha), \alpha)$$

$$\Phi(\alpha) = L(x(\alpha), y(\alpha), \lambda(\alpha), \alpha)$$

とおくが，$F(\alpha)$ を間接目的関数と呼ぶ．

<u>定理</u> $$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial L}{\partial \alpha}(x(\alpha), y(\alpha), \lambda(\alpha), \alpha) = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$$

（証明） $$\Phi(\alpha) = F(x(\alpha), y(\alpha), \lambda(\alpha), \alpha) \quad (*)$$

に注意しよう．これは $g(x(\alpha), y(\alpha), \alpha) \equiv 0$ であることから従う．$(*)$ の両辺を α で微分すると

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} &= L_x(x(\alpha), y(\alpha), \lambda(\alpha), \alpha)\cdot x'(\alpha)\\ &+ L_y(x(\alpha), y(\alpha), \lambda(\alpha), \alpha)\cdot y'(\alpha)\\ &+ L_\lambda(x(\alpha), y(\alpha), \lambda(\alpha), \alpha)\,\lambda'(\alpha)\\ &+ L_\alpha(x(\alpha), y(\alpha), \lambda(\alpha), \alpha)\cdot 1\end{aligned}\right\} = L_\alpha(x(\alpha), y(\alpha), \lambda(\alpha), \alpha)$$

1.3.4　$L = u(x, y) + \lambda(I - px - qy)$

間接効用関数 $v(p, q, I) = u(x(p, q, I), y(p, q, I))$

$L_I = \lambda$ から　$\dfrac{\partial v}{\partial I} = \lambda(p, q, I)$

$L_p = -\lambda x$ から　$\dfrac{\partial v}{\partial p} = -\lambda(p, q, I)\, x(p, q, I)$　(Royの恒等式)

$L_q = -\lambda y$ から　$\dfrac{\partial v}{\partial q} = -\lambda(p, q, I)\, y(p, q, I)$　(　=　)

1.3.1　$L = px + qy + \mu(\bar{u} - u(x, y))$

最小支出関数 $E(p, q, \bar{u}) = px^*(p, q, \bar{u}) + qy^*(p, q, \bar{u})$

$\dfrac{\partial L}{\partial p} = x$ から　$\dfrac{\partial E}{\partial p} = x^*(p, q, \bar{u})$

$\dfrac{\partial L}{\partial q} = y$ から　$\dfrac{\partial E}{\partial q} = y^*(p, q, \bar{u})$

(マッケンジーの補題)