第 2 講義 05 月 12 日　演習問題解答

I 次の行列の逆行列を求めましょう.

(1) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ **(2)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(3)** $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$ **(5)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **(6)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **(7)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

解答

(1) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ から

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

となります.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 2$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(3) $\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot \lambda = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - \lambda \cdot 0 = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(7) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となります.

II 関数

$$z = x^2 + xy + y^2 - 4x + 6y$$

に対して回転座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

を用いて、最小値を求めましょう.

解答

$$z = (x+y)^2 - xy - 4x + 6y$$

に

$$x + y = \sqrt{2}X, \quad xy = \frac{1}{2}\left(X^2 - Y^2\right)$$

を代入して

$$\begin{aligned} z &= 2X^2 - \frac{1}{2}\left(X^2 - Y^2\right) - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y) + 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \\ &= \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 + \sqrt{2}X + 5\sqrt{2}Y \\ &= \frac{3}{2}\left(X + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}(Y + 5\sqrt{2})^2 - \frac{1}{3} - 25 \end{aligned}$$

から $X = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, $Y = -5\sqrt{2}3$ のとき，すなわち

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3} + 5\sqrt{2}\right) = \frac{14}{3} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3} - 5\sqrt{2}\right) = -\frac{16}{3} \end{aligned}$$

のとき最小値 $z = -25$ をとります.

III

$$z = 2x^2 + 4xy - y^2 - 20x - 8y + 32$$

に対して，平行移動の座標変換を用いて 1 次の項のない形にしましょう.

解答 $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-20\\ -8\end{pmatrix}$ とすれば

$$z=\left(A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)+32$$

と表現できます.

$$\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}-\vec{\alpha},\quad \text{ただし }\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned}z&=\left(A\left(\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right),\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)+32\\ &=\left(A\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}+A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\vec{\alpha}\right)+32\\ &=\left(A\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right)+\left(A\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix},\vec{\alpha}\right)+\left(A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right)\\ &\qquad+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\vec{\alpha}\right)+32\end{aligned}$$

と展開できます．ここで

$$\left(A\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix},\vec{\alpha}\right)=\left(\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix},{}^tA\vec{\alpha}\right)=\left(\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix},A\vec{\alpha}\right)=\left(A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned}z&=\left(A\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right)+2\left(A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right)+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\vec{\alpha}\right)+32\\ &=\left(A\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right)+\left(2A\vec{\alpha}+\vec{b},\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right)+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+(\vec{b},\vec{\alpha})+32\end{aligned}$$

となります．ここで

$$2A\vec{\alpha}+\vec{b}=\vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-20\\ -8\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}36\\ 24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned}(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+(\vec{b},\vec{\alpha})+32&=-\frac{1}{2}(\vec{b},\vec{\alpha})+32 &(1)\\ &=-\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}-20\\ -8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}\right)+32=70 &(2)\end{aligned}$$

から

$$z=\left(A\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right)+70$$

となります.

IV

$$z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y$$

に対して，平行移動の座標変換を用いて 1 次の項のない形にしましょう．

解答 $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とすれば

$$z = \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

と表現できます．

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned} z &= \left(A\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right), \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right) \\ &= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right) \\ &= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right) + \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right) \end{aligned}$$

と展開できます．ここで

$$\left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^tA\vec{\alpha}\right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha}\right) = \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned} z &= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + 2\left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right) \\ &= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \end{aligned}$$

となります．ここで

$$2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned} (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) &= -\frac{1}{2}(\vec{b}, \vec{\alpha}) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

から

$$z = \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \frac{2}{3}$$

となります.

V 次の曲面の P_0 における接平面を求めましょう。
(1) $z = xy - 2x + 2y - 1$ at $P_0(0, 0, -1)$
(2) $z = \frac{x}{x+y}$ at $P_0(1, -2, -1)$
(3) $z = x^2 - xy + 2y^2$ at $P_0(2, 1, 4)$
(4) $z = \frac{y}{1+x^2}$ at $P_0(0, 0, 0)$
(2) と (4) では 1 変数の微分の公式

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}$$

を用いましょう。

解答 (1)

$$z_x = y - 2, \quad z_y = x + 2$$

から

$$z_x(0, 0) = -2, \quad z_y(0, 0) = 2$$

となります. よって $\mathrm{P}_0(0, 0, -1)$ における接平面は

$$z = -2x + 2y - 1$$

であることが分かります.

(2)

$$z_x = \frac{1 \cdot (x + y) - x \cdot 1}{(x + y)^2} = \frac{y}{(x + y)^2}, \quad z_y = \frac{-x}{(x + y)^2}$$

から

$$z_x(1, -2) = -2, \quad z_y(1, -2) = -1$$

となります. よって $\mathrm{P}_0(1, -2, -1)$ における接平面は

$$z = -2(x - 1) - (y + 2) - 1$$

であることが分かります.

(3)

$$z_x = 2x - y, \quad z_y = -x + 4y$$

から

$$z_x(2, 1) = 3, \quad z_y(2, 1) = 2$$

となります. よって $\mathrm{P}_0(2, 1, 4)$ における接平面は

$$z = 3(x - 2) + 2(y - 1) + 4$$

であることが分かります.

(4)

$$z_x = -\frac{y(2x)}{(1+x^2)^2} = -\frac{2xy}{(1+x^2)^2}, \quad z_y = \frac{1}{1+x^2}$$

から

$$z_x(0,0) = 0, \quad z_y(0,0) = 1$$

となります．よって $\mathrm{P}_0(0,0,0)$ における接平面は

$$z = y$$

であることが分かります．

VI $A = \begin{pmatrix} 5-c & 2 \\ 2 & 2-c \end{pmatrix}$ に対して

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}\right)$$

を満たす $c \in \mathbf{R}$ をすべて求めましょう．

解答　求める条件は

$$5 - c > 0 \quad \text{かつ} \quad \begin{vmatrix} 5-c & 2 \\ 2 & 2-c \end{vmatrix} > 0$$

となります．

$$\begin{vmatrix} 5-c & 2 \\ 2 & 2-c \end{vmatrix} = (5-c)(2-c) - 2^2 = (c-1)(c-6) > 0 \quad \Leftrightarrow c < 1, c > 6$$

なので，求める条件は

$$c < 1$$

であることが分かります．

VII 以下の曲線 $g(x,y) = 0$ の P_0 における接線を求めましょう．
(1) $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 1 = 0$ at $P_0(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$
(2) $g(x,y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - 1 = 0$ at $P_0(1,1)$
(3) $g(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ at $P_0(0,1)$

解答 (1) $g_x = 2x$, $g_y = 8y$ から

$$g_x(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}) = \sqrt{2}, \quad g_y(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}$$

と計算されます．従って $\mathrm{P}_0(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ における接線は

$$\sqrt{2}(x - \frac{1}{\sqrt{2}}) + 2\sqrt{2}(y - \frac{1}{2\sqrt{2}}) = 0$$

となります.

(2) $g_x = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}$, $g_y = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$ から

$$g_x(1,1) = \frac{1}{3}, \quad g_y(1,1) = \frac{1}{3}$$

となりますから，$\mathrm{P}_0(1,1)$ における接線は

$$\frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(y-1) = 0$$

となります.

(3) $g_x = 2x - y$, $g_y = -x + 2y$ から

$$g_x(0,1) = -1, \quad g_y(0,1) = 2$$

となりますから，$\mathrm{P}_0(1,1)$ における接線は

$$-1 \cdot (x-0) + 2(y-1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad -x + 2(y-1) = 0$$

となります.

VIII 資本 K, 労働力 L の投入に対する生産関数

$$Q = F(K,L) = 9K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

を考えます.

(1) $K = 216$ and $L = 10^3$ に対する生産量 Q を求めましょう.

(2) $(K,L) = (216, 10^3)$ のときの資本の限界生産物 MPK と労働の限界生産物 MPL を求めて, $F(216, 998)$ と $F(217.5, 10^3)$ の近似値を求めましょう.

解答 計算のために $216 = 6^3$ に注意しましょう．このとき

$$Q = F(216, 10^3) = 9 \times \left(6^3\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(10^3\right)^{\frac{2}{3}} = 9 \times 6 \times 10^2 = 5400$$

であることが分かります．次に MPK と MPL を以下のように求めます.

$$F_K(K,L) = 3K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}, \quad F_L(K,L) = 6K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{1}{3}}$$

従って $K = 216 = 6^3$, $L = 10^3$ のとき

$$\begin{aligned} MPK = F_K(216, 10^3) &= 3\left(6^3\right)^{-\frac{2}{3}}\left(10^3\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= 3 \times \frac{1}{36} \times 10^2 = \frac{1}{12} \times 10^2 = 8.33\ldots \\ MPL = F_L(216, 10^3) &= 6 \times \left(6^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(10^3\right)^{-\frac{1}{3}} \\ &= 6 \times 6 \times 10^{-1} = 3.6 \end{aligned}$$

以上から $F_L(216, 10^3)$ を用いて $F(216, 998) = F(216, 10^3 - 2)$ の近似値を

$$\begin{aligned} F(216, 10^3 + 2) &\approx F(216, 10^3) + F_L(216, 10^3) \cdot (-2) \\ &= 5400 + 3.6 \times (-2) = 5392.8 \end{aligned}$$

と求めます．さらに $F_K(216, 10^3)$ を用いて $F(217.5, 10^3) = F(216 + 1.5, 10^3)$ の近似値を

$$\begin{aligned} F(216 + 1.5, 10^3) &\approx F(216, 10^3) + F_K(216, 10^3) \cdot 1.5 \\ &= 5400 + \frac{1}{12} \times 10^2 \times 1.5 = 5412.5 \end{aligned}$$

と求めます.

IX 次の 3 点 A, B, C を通る平面の方程式を求めましょう．

(1) $\mathrm{A}(0,0,0)$, $\mathrm{B}(1,2,3)$, $\mathrm{C}(4,5,6)$

(2) $\mathrm{A}(2,0,0)$, $\mathrm{B}(0,3,0)$, $\mathrm{C}(0,0,4)$

(3) $\mathrm{A}(1,2,3)$, $\mathrm{B}(-1,-1,0)$, $\mathrm{C}(2,-3,5)$

解答以下では

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

に対して

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

と $\vec{p}$ と $\vec{q}$ の外積を定めると

$$(\vec{p}, \vec{p} \times \vec{q}) = (\vec{q}, \vec{p} \times \vec{q}) = 0$$

が成立することを用いています．これは講義の中で説明します.

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から原点を通り法線ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるので，求める平面の方程式は

$$x - 2y + z = 0$$

であることが分かります.

(2)

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 0$$

は平面を表して，与えられた 3 点を通るので，これが求める方程式となります.

(3)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17\\1\\11\end{pmatrix}$$

から平面の法線ベクトルは $\left(\begin{smallmatrix}-17\\1\\11\end{smallmatrix}\right)$ であることが分かります．これから求める平面の方程式は

$$-17(x-1+(y-2))+11(z-3)=0$$

となります.

X 以下のベクトルの外積を計算しましょう.
(1) $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)\times\left(\begin{smallmatrix}2\\-1\\1\end{smallmatrix}\right)$ **(2)** $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right)\times\left(\begin{smallmatrix}3\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ **(3)** $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right)\times\left(\begin{smallmatrix}2\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)$

解答 (1)

$$\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)\times\left(\begin{smallmatrix}2\\-1\\1\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\left|\begin{smallmatrix}1&-1\\1&1\end{smallmatrix}\right|\\-\left|\begin{smallmatrix}1&2\\1&1\end{smallmatrix}\right|\\\left|\begin{smallmatrix}1&2\\1&-1\end{smallmatrix}\right|\end{pmatrix}=\left(\begin{smallmatrix}2\\1\\-3\end{smallmatrix}\right)$$

(2)

$$\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right)\times\left(\begin{smallmatrix}3\\1\\1\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\left|\begin{smallmatrix}2&1\\1&1\end{smallmatrix}\right|\\-\left|\begin{smallmatrix}1&3\\1&1\end{smallmatrix}\right|\\\left|\begin{smallmatrix}1&3\\2&1\end{smallmatrix}\right|\end{pmatrix}=\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\-5\end{smallmatrix}\right)$$

(3)

$$\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right)\times\left(\begin{smallmatrix}2\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\left|\begin{smallmatrix}2&1\\3&-1\end{smallmatrix}\right|\\-\left|\begin{smallmatrix}1&2\\3&-1\end{smallmatrix}\right|\\\left|\begin{smallmatrix}1&2\\2&1\end{smallmatrix}\right|\end{pmatrix}=\left(\begin{smallmatrix}-5\\7\\-3\end{smallmatrix}\right)$$

XI(1) $\vec{a},\vec{b}\in\mathbf{R}^3$ とします．$\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$ であるとき，$\vec{a},\vec{b}$ が作る平行四辺形の面積は

$$||\vec{a}\times\vec{b}||$$

であることを示しましょう．また

$$(\vec{a}\times\vec{b},\vec{a})=(\vec{a}\times\vec{b},\vec{b})=0$$

であることを示しましょう．（ここでは，3 次行列式を使わないで示しましょう.）
(2) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbf{R}^3$ とします．$\vec{a},\vec{b},\vec{c}\neq\vec{0}$ であるとき，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ が作る平行四面体の体積は

$$|(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})|$$

であることを示しましょう.

XII $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbf{R}^3$ とします．このとき

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a},\ \vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

とします．このとき

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\begin{vmatrix}b_2 & a_2\\ b_3 & a_3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}b_1 & a_1\\ b_3 & a_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}b_1 & a_1\\ b_2 & a_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=-\vec{b}\times\vec{a}$$

さらに $\vec{a}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{a}$ から $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ が従います.

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}&=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_2+b_2 & c_2\\ a_3+b_3 & c_3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a_1+b_1 & c_1\\ a_3+b_3 & c_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_1+b_1 & c_1\\ a_2+b_2 & c_3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_3\end{vmatrix}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_3\end{vmatrix}\end{pmatrix}\\
&=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}\end{aligned}$$