emath 2020 L07
exosol

I (1)

(1), (2) を r で偏微分すると

$$1 \cdot f_x(x(p,q,r), y(p,q,r)) + r\left(f_{xx}(x(p,q,r), y(p,q,r)) \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + f_{xy}(x(p,q,r), y(p,q,r)) \cdot \frac{\partial y}{\partial r}\right) = 0$$

$$1 \cdot f_y(x(p,q,r), y(p,q,r)) + r\left(f_{yx}(x(p,q,r), y(p,q,r)) \frac{\partial x}{\partial r} + f_{yy}(x(p,q,r), y(p,q,r)) \frac{\partial y}{\partial r}\right) = 0$$

これを整理すると

$$r\, H(f)(x(p,q,r), y(p,q,r)) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \end{pmatrix} = -\nabla(f)(x(p,q,r), y(p,q,r))$$

となります。これから

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{-\begin{vmatrix} f_x & f_{xy} \\ f_y & f_{yy} \end{vmatrix}}{r \det(H(f))}$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{-\begin{vmatrix} f_{xx} & f_x \\ f_{xy} & f_y \end{vmatrix}}{r \det(H(f))}$$

となります。

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial r} = f_x(x(p,q,r), y(p,q,r)) \cdot \dfrac{\partial x}{\partial r}$

$$+ f_y(x(p,q,r), y(p,q,r)) \cdot \frac{\partial y}{\partial r}.$$

$$= \frac{1}{r^2 \det(H(f))} \cdot$$

$$\{ f_x (f_y \cdot f_{xy} - f_x \cdot f_{yy}) + f_y (f_x \cdot f_{xy} - f_y \cdot f_{xx}) \}$$

$$= -\frac{1}{r^2} (f_{xx} f_y^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} \cdot f_x^2)$$

$$= -\frac{1}{r^2} \left(\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_y \\ -f_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_y \\ -f_x \end{pmatrix} \right) > 0$$

が $\begin{pmatrix} f_y \\ -f_x \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ から分かります．$H(f)$ が負定値の2次形式を定めることに注意しましょう．

(3) $$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{f_{yy}}{r \det H(f)}, \quad \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{-f_{yx}}{r \det H(f)}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{-f_x \cdot f_{yy} + f_y \cdot f_{xy}}{r \det H(f)}$$

を用います.

$$p \cdot \frac{\partial x}{\partial p} + q \cdot \frac{\partial x}{\partial q} + r \cdot \frac{\partial x}{\partial r}$$

$$= \frac{1}{r \det H(f)} \left(p f_{yy} - q f_{yx} - r f_x \cdot f_{yy} + r f_y \cdot f_{xy} \right)$$

$$= \frac{1}{r \det H(f)} \left(f_{yy}(p - r f_x) + f_{xy}(r f_y - q) \right)$$

$$= 0$$

から $x(p, q, r)$ が 0次同次であることが従います.

さらに $$\frac{p}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{q}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{r}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} = 0$$

から $$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} = 0$$

が分かります.

Ⅱ $x(p,q,r) = \dfrac{r^3}{27p^2q}$, $y(p,q,r) = \dfrac{r^3}{27pq^2}$

であることを用います。（L06 の演習問題 VI）

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -\frac{2r^3}{27p^3q} \quad \text{から}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{p}{x}\cdot\left(-\frac{2r^3}{27p^3q}\right) = \frac{27p^2q}{r^3}\cdot\left(-\frac{2r^3}{27p^2q}\right)$$

$$= -2$$

$$\frac{\partial x}{\partial q} = -\frac{r^3}{27p^2q^2} \quad \text{から}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{q}{x}\cdot\left(-\frac{r^3}{27p^2q^2}\right)$$

$$= \frac{27p^2q}{r^3}\cdot\left(-\frac{r^3}{27p^2q}\right) = -1$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{3r^2}{27p^2q} \quad \text{から}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{r}{x}\cdot\left(\frac{3r^2}{27p^2q}\right) = \frac{27p^2q}{r^3}\cdot\frac{3r^3}{27p^2q} = 3$$

となります。

注　$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} = 0$ に注意。

$\varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}$ については省略。