第 8 講義 06 月 23 日　演習問題解答

I 次の $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて

$$L = L(\vec{a}, \vec{b}) = \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

を考えます．$\vec{c}$ の L への直交射影を $X = (\vec{a}\ \vec{b})$ のグラム行列 ${}^t XX$ を用いて求めましょう．

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　**(2)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　**(4)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

解答 (1)

$${}^t XX = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad {}^t X\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と計算されます．$\vec{c}$ の L への直交射影を $\vec{w} = x\vec{a} + \vec{b}$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{14} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

が分かり

$$\vec{w} = \frac{4}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}$$

(2)

$${}^t XX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad {}^t X\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と計算されます．$\vec{c}$ の L への直交射影を $\vec{w} = x\vec{a} + \vec{b}$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が分かり

$$\vec{w} = -\frac{10}{17} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{17} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}$$

(3)

$${}^t XX = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad {}^t X\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と計算されます．$\vec{c}$ の L への直交射影を $\vec{w} = x\vec{a} + \vec{b}$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が分かり

$$\vec{w} = \frac{2}{11}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{3}{11}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}5\\2\\5\\1\end{pmatrix}$$

(4)

$$ {}^tXX = \begin{pmatrix}4 & 2\\2 & 6\end{pmatrix}, \quad {}^tX\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

と計算されます．$\vec{c}$ の L への直交射影を $\vec{w} = x\vec{a} + \vec{b}$ とすると

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 2\\2 & 6\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix}6 & -2\\-2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

が分かり

$$\vec{w} = \frac{2}{11}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{11}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}3\\2\\4\\-1\end{pmatrix}$$

II 以下の $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ に対して $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が張る部分空間

$$L_3 = L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \{x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c};\ x, y, z \in \mathbf{R}\}$$

の正規直交基底を求めましょう．

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ **(2)** $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

(3) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ **(4)** $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

解答

(1) 6 月 2 日の問題 I(1) から

$$L =: \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

の正規直交系として

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}$$

で, $\vec{c}$ の L への直交射影が

$$\begin{aligned}\vec{w}_2 &= (\vec{c},\vec{p})\vec{p} + (\vec{c},\vec{q})\vec{q} \\ &= \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{14}\begin{pmatrix}-2\\3\\13\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となります. L に垂直な L_3 中のベクトルとして

$$\vec{c}-\vec{w}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{14}\begin{pmatrix}-2\\3\\13\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

を考えると，これを正規化して

$$\vec{r} = \frac{1}{||\vec{c}-\vec{w}_2||}(\vec{c}-\vec{w}_2) = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ が L_3 の正規直交基底となります.

(2) 6 月 2 日の問題 I(2) から

$$L =: \{x\vec{a}+y\vec{b};\ x,y\in\mathbf{R}\}$$

の正規直交系として

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$$

で, $\vec{c}$ の L への直交射影が

$$\begin{aligned}\vec{w}_2 &= (\vec{c},\vec{p})\vec{p} + (\vec{c},\vec{q})\vec{q} \\ &= \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{17}\begin{pmatrix}-4\\6\\13\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となります. L に垂直な L_3 中のベクトルとして

$$\vec{c}-\vec{w}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{17}\begin{pmatrix}-4\\6\\13\end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix}4\\-6\\4\end{pmatrix}$$

を考えると，これを正規化して

$$\vec{r} = \frac{1}{||\vec{c}-\vec{w}_2||}(\vec{c}-\vec{w}_2) = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ が L_3 の正規直交基底となります.

(3) $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は
$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{||\vec{a}||^2} = \frac{1}{4}\vec{a}$$
と求められます．このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして
$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$
が求まります．このとき $\vec{a}$ と $\vec{b} - \vec{w}$ を正規化した
$$\vec{p} = \frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{||\vec{b} - \vec{w}||}(\vec{b} - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$
が
$$L =: \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$
の正規直交基底となります．$\vec{c}$ の L への直交射影が
$$\begin{aligned} \vec{w}_2 &= (\vec{c}, \vec{p})\vec{p} + (\vec{c}, \vec{q})\vec{q} \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
となります．L に垂直な L_3 中のベクトルとして
$$\vec{c} - \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$
を考えると，これを正規化して
$$\vec{r} = \frac{1}{||\vec{c} - \vec{w}_2||}(\vec{c} - \vec{w}_2) = \frac{1}{\sqrt{66}}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$
と定めると $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ が L_3 の正規直交基底となります．

(4) 6 月 2 日の確認問題 I(4) から
$$L =: \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$
の正規直交系として
$$\vec{p} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を求めました．$\vec{c}$ の L への直交射影が

$$\begin{aligned}\vec{w}_2 &= (\vec{c},\vec{p})\vec{p} + (\vec{c},\vec{q})\vec{q} \\ &= \left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1\\4\\2\\7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となります．L に垂直な L_3 中のベクトルとして

$$\vec{c}-\vec{w}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1\\4\\2\\7\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\\3\end{pmatrix}$$

を考えると，これを正規化して

$$\vec{r} = \frac{1}{||\vec{c}-\vec{w}_2||}(\vec{c}-\vec{w}_2) = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\\3\end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ が L_3 の正規直交基底となります.

III 以下のベクトルが線型独立か線型従属か行列の行基本変形を用いて判定しましょう．

(i) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$

(ii) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$

(iii) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\-3\\7\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\0\\-6\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}$

(iv) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix}$

解答 (i) $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ を解くために $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ を行基本変形します.

$$\begin{pmatrix}1&2&7\\-2&1&-4\\1&-1&1\end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix}1&2&7\\0&5&10\\0&-3&-6\end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix}1&2&7\\0&1&2\\0&-3&-6\end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

から $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ は

$$\begin{cases} x + 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

と必要十分であることが分かります．特に $z=-1$ として $x=3,\ y=2$ が解となりますから

$$3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$$

が成立することが分かります．よって $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は線型従属であることが分かります．

なお，上で以下の行基本変形を用いました．

$$\begin{array}{ll} (1) & 2r+=1r\times 2,\ 3r+=1r\times(-1) \\ (2) & 2r\times=\frac{1}{5} \\ (3) & 1r+=2r\times(-2),\ 3r+=2r\times 3 \end{array}$$

(ii) $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ を解くために $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ を行基本変形します．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ は

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

と必要十分であることが分かります．従って $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ から $x=y=z=0$ が従いますから，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は線型独立であることが分かります．

なお，上で以下の行基本変形を用いました．

$$\begin{array}{ll} (1) & 2r+=1r\times(-2),\ 3r+=1r\times 3 \\ (2) & 2r\times=\left(-\frac{1}{5}\right) \\ (3) & 1r+=2r\times(-1),\ 3r+=2r\times(-5) \\ (4) & 3r\times=\frac{1}{6} \\ (5) & 1r+=3r\times(-1),\ 2r+=3r\times(-1) \end{array}$$

(iii) $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}+w\vec{d}=\vec{0}$ を解くために $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d})$ を行基本変形します．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -1 & 4 \\ 7 & 6 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & -8 & -22 & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -8 & -22 & -19 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{34}{3} & -\frac{17}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

から $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}+w\vec{d}=\vec{0}$ は

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & - & \frac{3}{2}w & = & 0 \\ & y & & + & \frac{5}{6}w & = & 0 \\ & & z & + & \frac{1}{2}w & = & 0 \end{array}\right.$$

と必要十分であることが分かります．従って $w=1$ として得られる解

$$x=\frac{3}{2},\ y=-\frac{5}{6},\ z=-\frac{1}{2},\ w=1$$

を用いると非自明な線型関係

$$\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{5}{6}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$$

が成立することが分かります．よって $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}$ は線型従属であることが分かりました．

なお，上で以下の行基本変形を用いました．

$$\begin{array}{ll} (1) & 2r+=1r\times 3,\ 3r+=1r\times(-7) \\ (2) & 2r\times=\left(\frac{1}{6}\right) \\ (3) & 1r+=2r\times(-2),\ 3r+=2r\times 8 \\ (4) & 3r\times=\left(-\frac{3}{34}\right) \\ (5) & 1r+=3r\times\left(-\frac{1}{3}\right),\ 2r+=3r\times\left(-\frac{5}{6}\right) \end{array}$$

(iv) $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ を解くために $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ を行基本変形します．

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ -3 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{29}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{29}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ は

$$\left\{\begin{array}{cccc} x & & = & 0 \\ & z & = & 0 \end{array}\right.$$

と必要十分であることが分かります．従って

$$x=0,\ y=1,\ z=0$$

が解となりますから，非自明な線型関係

$$1\cdot\vec{b}=\vec{0}$$

が成立することが分かります．よって $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は線型従属であることが示されました．

なお，上で以下の行基本変形を用いました．

$$\begin{array}{ll} (1) & 1r\times=\frac{1}{2} \\ (3) & 2r+=1r\times 3,\ 3r+=1r\times(-7) \\ (4) & 2r\times=\frac{2}{7} \\ (5) & 1r+=2r\times\left(-\frac{3}{2}\right),\ 3r+=2r\times\frac{29}{2} \end{array}$$

IV $p, q, I > 0$ とします．効用関数

$$u(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$$

を制約条件

$$I - px - qy = 0$$

の下で最大化することを考えます．

(1) 停留点を求めて

$$x(p,q,I) = \frac{I}{2p}, \quad y(p,q,I) = \frac{I}{2q}, \quad \lambda = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{pqI}}$$

であることを示しましょう．

(2) 間接効用関数

$$v(p,q,I) = u(x(p,q,I), y(p,q,I))$$

に対して

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \lambda(p,q,I)$$

が成立することを示しましょう．

(3) Roy の恒等式

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial I} \cdot x(p,q,I) = 0$$

が成立することを示しましょう．

解答 (x,y) で極大または極小とすると

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} - \lambda p &= 0 \quad \ldots\ldots(1) \\ \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}} - \lambda q &= 0 \quad \ldots\ldots(2) \\ I - px - qy &= 0 \quad \ldots\ldots(3) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．(1)$\times x$ と (2)$\times y$ から

$$\lambda px = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}, \quad \lambda qy = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$$

が分かります．(1) または (2) から $\lambda \neq 0$ が必要ですから

$$px = qy = \frac{1}{3\lambda}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$$

となります．さらに (3) を用いると

$$px = qy = \frac{I}{2} \quad \text{従って} \quad x = \frac{I}{2p},\ y = \frac{I}{2q}$$

となります．(1),(2) から

$$\frac{1}{9}x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} - \lambda^2 pq = 0$$

となりますから

$$\lambda^2 = \frac{1}{9pq}\sqrt[3]{\frac{4pq}{I^2}} = \frac{1}{3^2}\sqrt[3]{\frac{2^2}{p^2q^2I^2}}$$

従って

$$\lambda = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{pqI}}$$

であることが分かります．(1) から $\lambda > 0$ となることに注意しましょう．

(2)

$$\text{間接効用関数}v(p,q,I) = \left(\frac{I}{2p}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{I}{2q}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{I^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}}$$

を I で偏微分すると

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \frac{2}{3}\cdot\frac{I^{-\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2^{\frac{1}{3}}}{p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}I^{\frac{1}{3}}} = \lambda$$

となります．

注意　これから $\lambda(p,q,I)$ を**所得の限界効用関数**と呼びます．

(3) 間接効用関数 $v(p,q,I)$ を p で偏微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial p} &= -\frac{1}{3}\cdot\frac{I^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}p^{\frac{4}{3}}q^{\frac{1}{3}}}\\ &= -\frac{I}{2p}\cdot\frac{2p}{I}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{I^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}p^{\frac{4}{3}}q^{\frac{1}{3}}}\\ &= -\frac{I}{2p}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{\frac{1}{3}}}{p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}I^{\frac{1}{3}}}\\ &= -\frac{I}{2p}\cdot\lambda = -x\frac{\partial v}{\partial I}\end{aligned}$$

と Roy の恒等式が成立することが分かります．

V $p,q,I > 0$ とします．効用関数

$$u(x,y) = \frac{1}{3}\log x + \frac{1}{3}\log y$$

を制約条件

$$I - px - qy = 0$$

の下で最大化することを考えます．停留点を求めて、需要関数と所得の限界効用関数 $\lambda(p,q,I)$ を求めましょう．

解答 (x,y) で極大または極小とすると

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\frac{1}{x} - \lambda p &= 0 \quad \ldots\ldots(1)\\ \frac{1}{3}\frac{1}{y} - \lambda q &= 0 \quad \ldots\ldots(2)\\ I - px - qy &= 0 \quad \ldots\ldots(3)\end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．(1),(2) から

$$\begin{cases} \lambda p &= \frac{1}{3}\frac{1}{x} \quad \ldots\ldots(1)'\\ \lambda q &= \frac{1}{3}\frac{1}{y} \quad \ldots\ldots(2)'\end{cases}$$

であることが分かります．(1)'/(2)' から

$$\frac{p}{q} = \frac{y}{x} \quad \text{すなわち} \quad px = qy$$

が従います．(3) から

$$px = qy = \frac{I}{2} \quad 従って \quad x = \frac{I}{2p},\ y = \frac{I}{2q}$$

を得ます．このとき所得の限界効用関数は

$$\lambda = \frac{1}{3p} \cdot \frac{2p}{I} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{I}$$

となります．

注意

$$U(x, y) := e^{u(x,y)} = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$$

と定義すると

$$u(x, y) = C \ \Leftrightarrow U(x, y) = e^C$$

となります．$U(x, y)$ が問題 I の効用関数にあたることに注意すると，2 つの効用関数の無差別曲線族が同じものであることが分かります．需要関数が無差別曲線族にしかよらないことの例を与えてくれます．

VI 制約条件

$$x^2 + 2y^2 - 24 = 0$$

の下で

$$z = x + y$$

の停留点を求めましょう．

解答 (x, y) で極大または極小とすると

$$\left\{ \begin{array}{ccll} 1 + \lambda \cdot 2x & = & 0 & \ldots\ldots(1) \\ 1 + \lambda \cdot 4y & = & 0 & \ldots\ldots(2) \\ x^2 + 2y^2 - 24 & = & 0 & \ldots\ldots(3) \end{array} \right.$$

が成立します．(1),(2) から

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \quad y = -\frac{1}{4\lambda}$$

を得ますから，これを (3) に代入して

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{8\lambda^2} = 24 \quad すなわち \quad \frac{3}{8\lambda^2} = 24$$

から $\lambda = \pm 18$ であることが分かります．これから

$$x = \mp 4,\ y = mp2$$

となります．停留点は

$$(x, y, \lambda) = (\mp 4, \mp 2, \pm\frac{1}{8})$$

VII $p, q, I > 0$ とします．効用関数

$$u(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$$

を制約条件

$$I - px - qy = 0$$

の下で最大化することを考えます．停留点を求めて、需要関数と所得の限界効用関数 $\lambda(p,q,I)$ を求めましょう．

解答 (x,y) で極大または極小とすると

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} - \lambda p &= 0 \quad \ldots\ldots(1) \\ \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} - \lambda q &= 0 \quad \ldots\ldots(2) \\ I - px - qy &= 0 \quad \ldots\ldots(3) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．(1),(2) から

$$\begin{cases} \lambda p = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} \quad \ldots\ldots(1)' \\ \lambda q = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} \ldots\ldots(2)' \end{cases}$$

が従います．(1)’/(2)’ から

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{2}\cdot\frac{y}{x} \quad \text{従って} \quad px = \frac{1}{2}qy$$

となります．これを (3) に代入すると

$$I - \frac{1}{2}qy - qy = I - \frac{3}{2}qy = 0$$

から

$$x = \frac{I}{3p}, \quad y = \frac{2I}{3p}$$

と需要関数が求まります．このとき所得の限界効用関数は

$$\lambda = \frac{1}{q}\cdot\left(\frac{\frac{I}{3p}}{\frac{2I}{3q}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2q^2p}}$$

となります．

VIII $g(x,y) := 2x^2 + y^2 - 1 = 0$ の下で $z = f(x,y) = x^2y$ を考えます．停留点を求めましょう．（CT290 ページ，演習 8.13）

解答 f と g の偏導関数を求めると

$$g_x = 4x,\ g_y = 2y,\ f_x = 2xy,\ f_y = x^2$$

となります．(x,y) で極大または極小であるとすると

$$\begin{cases} 2xy + \lambda\cdot 4x = 0 \quad (i) \\ x^2 + \lambda\cdot 2y = 0 \quad (ii) \\ 2x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (iii) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．まず

$$(i) \Leftrightarrow (x = 0 \quad \text{OR} \quad y + 2\lambda = 0)$$

となりますから，これをもとに場合を分けて考えます．
(1)$\underline{x = 0 \text{ のとき}}$　(ii) は $\lambda y = 0$ となりますが，これは

$$\lambda = 0 \quad \text{OR} \quad y = 0$$

と必要十分です．ところが $y = 0$ とすると $(x, y) = (0, 0)$ は (iii) を満たしません．従って $y \neq 0$ すなわち $\lambda = 0$ であることが分かります．このとき $x = 0$ を (iii) に代入して

$$y = \pm 1$$

となります．以上で

$$(x, y, \lambda) = (0, \pm 1, 0)$$

がこの場合の停留点であることが分かります．
(2)$\underline{y + 2\lambda = 00 \text{ のとき}}$$2\lambda = -y$ を (ii) の代入すると

$$x^2 - y^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (x = y \quad \text{OR} \quad x = -y)$$

であることが分かります．
(2a)$\underline{x = y \text{ のとき}}$(iii) から

$$(x, y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}) \quad \text{（複号同順）}$$

となります．このとき $\lambda = -\frac{1}{2}y$ から $\lambda = \mp\frac{1}{2\sqrt{3}}$（複号同順）となります．まとめて，この場合は

$$(x, y, \lambda) = (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{2\sqrt{3}}) \quad \text{（複号同順）}$$

となります．
(2b)$\underline{x = -y \text{ のとき}}$(iii) から

$$(x, y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}) \quad \text{（複号同順）}$$

となります．このとき $\lambda = -\frac{1}{2}y$ から $\lambda = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$（複号同順）となります．まとめて，この場合は

$$(x, y, \lambda) = (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}) \quad \text{（複号同順）}$$

となります．

IX x の関数 $y = \varphi(x)$ が

$$x^2 + \varphi(x)^2 - 3x\varphi(x) = 0 \tag{\#}$$

を満たしているとします．$\varphi'(x)$ と $\varphi''(x)$ を x と $\varphi(x)$ で表しましょう．（CT294 ページ，演習 8.18）

解答 (#) の両辺を微分して

$$2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) - 3\varphi(x) - 3x\varphi'(x) = 0 \tag{\$}$$

すなわち

$$(2\varphi(x) - 3x)\varphi'(x) = -2x + 3\varphi(x)$$

から

$$\varphi'(x) = \frac{3\varphi(x) - 2x}{2\varphi(x) - 3x}$$

となります．($) の両辺を微分して

$$2 + 2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) - 3\varphi'(x) - 3\varphi'(x) - 3x\varphi''(x) = 0$$

すなわち

$$\begin{aligned}(2\varphi(x) - 3x) &= -2 - 2(\varphi'(x))^2 + 6\varphi'(x)\\ &= \frac{10\varphi(x)^2 - 30x\varphi(x) + 10x^2}{(2\varphi(x) - 3x)^2}\\ &= \frac{10}{(2\varphi(x) - 3x)^2}\end{aligned}$$

から

$$\varphi''(x) = \frac{10}{(2\varphi(x) - 3x)^3}$$

となります．

> **X** $g(x, y) = 1 - xy = 0$ の下で $z = f(x, y) = x + 2y$ を考えます．停留点を求めて，極大・極小を判定しましょう．

解答

$$g_x = -y,\ g_y = -x,\ f_x = 1,\ f_y = 2$$

と計算されます．$f(x, y)$ が (x, y) において制約 $g(x, y) = 0$ の下で極大または極小ならば

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & + & \lambda(-y) & = & 0 \quad (1)\\ 2 & + & \lambda(-x) & = & 0 \quad (2)\\ & & 1 - xy & = & 0 \quad (3)\end{array}\right.$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．

もし $\lambda = 0$ ならば (1) が $1 = 0$ となりますから，(1),(2),(3) の下では $\lambda \neq 0$ であることが分かります．このとき (1) と (2) から

$$x = \frac{2}{\lambda}, \quad y = \frac{1}{\lambda} \tag{4}$$

となります．(4) を用いて (3) から x と y を消去すると

$$1 - \frac{2}{\lambda^2} = 0 \quad 従って \quad \lambda = \pm\sqrt{2} \tag{11}$$

であることが分かります．これから

$$(x, y) = (\pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}) \quad （複号同順）$$

が停留点であることが示されました．

さらに

$$g_{xx}\ g_{yy}=0,\ g_{xy}=g_{yx}=-1$$
$$f_{xx}=f_{yy}=f_{xy}=f_{yy}=0$$

と計算すると Lagrange 関数 $L=f+\lambda g$ が

$$\begin{aligned}B:=&\begin{vmatrix}0 & g_x & g_y\\ g_x & L_{xx} & L_{xy}\\ g_y & L_{yx} & L_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -y & -x\\ -y & 0 & -\lambda\\ -x & -\lambda & 0\end{vmatrix}\\ =&-2\lambda xy=-2\lambda\end{aligned}$$

を満たします．

(i) $(x,y,\lambda)=(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$ において

$$B=-2\sqrt{2}<0$$

となりますから f は制約条件 $g=0$ の下で極小であることが分かります．

(ii) $(x,y,\lambda)=(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2})$ において

$$B=2\sqrt{2}>0$$

となりますから f は制約条件 $g=0$ の下で極大であることが分かります．

XI $g(x,y)=x^2-y^2-1=0$ をその上の点 $(2,\sqrt{3})$ の近傍で解いて

$$\varphi(x)=\sqrt{x^2-1} \tag{12}$$

とします．$\varphi''(2)$ を g の 1 階および 2 階の偏微分係数を用いて求めましょう．

解答

$$g_x=2x,\ g_y=-2y,$$
$$g_{xx}=2,\ g_{xy}=g_{yx}=0,\ g_{yy}=-2$$

と計算します．このとき

$$\begin{aligned}\varphi''(2)=&\frac{1}{g_y(2,\sqrt{3})}\begin{vmatrix}0 & g_x(2,\sqrt{3}) & g_y(2,\sqrt{3})\\ g_x(2,\sqrt{3}) & g_{xx}(2,\sqrt{3}) & g_{xy}(2,\sqrt{3})\\ g_y(2,\sqrt{3}) & g_{yx}(2,\sqrt{3}) & g_{yy}(2,\sqrt{3})\end{vmatrix}=\frac{1}{(2\sqrt{3})^3}\begin{vmatrix}0 & 4 & 2\sqrt{3}\\ 4 & 2 & 0\\ 2\sqrt{3} & 0 & -2\end{vmatrix}\\ =&\frac{1}{24\sqrt{3}}(-4\cdot 4\cdot(-2)-2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2)=\frac{8}{24\sqrt{3}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

XII $g(x,y)=x+2y-1=0$ の下で $z=f(x,y)=xy$ を考えます．停留点を求めて極大・極小を判定しましょう．

解答

$$g_x = 1,\ g_y = 2,\ f_x = y,\ f_y = x$$

と計算します．$f(x, y)$ が (x, y) において制約条件 $g(x, y) = 0$ の下で極大または極小ならば

$$\begin{cases} y \quad + \quad \lambda \cdot 1 & = \quad 0 \quad (1) \\ x \quad + \quad \lambda \cdot 2 & = \quad 0 \quad (2) \\ \qquad x + 2y - 1 & = \quad 0 \quad (3) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．このとき (1) と (2) から

$$x = -2\lambda, \quad y = -\lambda \tag{4}$$

が従います．さらに (1) の y を $y = -2\lambda$ によって消去すると

$$-2\lambda - 2\lambda - 1 = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lambda = -\frac{1}{4}$$

であることが分かります．これから

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{4}$$

が従います．さらに

$$\begin{aligned} g_{xx} = g_{xy} = g_{yx} = g_{xx} = 0 \\ f_{xx} = 0,\ f_{xy} = f_{yx} = 1,\ f_{yy} = 0 \end{aligned}$$

と計算します．すると Lagrange 関数 $L = f + \lambda g$ が

$$\begin{aligned} B := &\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 4 > 0 \end{aligned}$$

を満たしますから f は $(x, y, \lambda) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ において制約条件 $g = 0$ の下で極大であることが分かります．