第 11 講義 2020/07/14 演習問題解答

V 曲線 $g(x,y) := x^2 - xy + y^2 - 1$ を $(1,1)$ の近傍で解いた

$$y = \varphi(x) = \frac{x + \sqrt{4-3x^2}}{2}$$

に対して $\varphi''(1)$ を g の 1 階および 2 階の偏微分係数を用いて求めましょう．

解答

$$g_x = 2x - y, \quad g_y = -x + 2y$$

$$g_{xx} = 2,\ g_{xy} = g_{yx} = -1,\ g_{yy} = 2$$

となる．これから

$$\begin{aligned}\varphi''(1) &= \frac{1}{g_y(1,1)^3}\begin{vmatrix} 0 & g_x(1,1) & g_y(1,1) \\ g_x(1,1) & g_{xx}(1,1) & g_{xy}(1,1) \\ g_y(1,1) & g_{yx}(1,1) & g_{yy}(1,1)\end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{1}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3\end{vmatrix} = -6\end{aligned}$$

であることが分かります．

VI $g(x,y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$ をその上の点 $(2, \sqrt{3})$ の近傍で解いて

$$\varphi(x) = \sqrt{x^2 - 1} \tag{19}$$

とします．$\varphi''(2)$ を g の 1 階および 2 階の偏微分係数を用いて求めましょう．

解答

$$\begin{aligned} g_x = 2x,\ g_y = -2y, \\ g_{xx} = 2,\ g_{xy} = g_{yx} = 0,\ g_{yy} = -2\end{aligned}$$

と計算します．このとき

$$\begin{aligned}\varphi''(2) &= \frac{1}{g_y(2,\sqrt{3})^3}\begin{vmatrix} 0 & g_x(2,\sqrt{3}) & g_y(2,\sqrt{3}) \\ g_x(2,\sqrt{3}) & g_{xx}(2,\sqrt{3}) & g_{xy}(2,\sqrt{3}) \\ g_y(2,\sqrt{3}) & g_{yx}(2,\sqrt{3}) & g_{yy}(2,\sqrt{3})\end{vmatrix} = \frac{1}{(-2\sqrt{3})^3}\begin{vmatrix} 0 & 4 & -2\sqrt{3} \\ 4 & 2 & 0 \\ -2\sqrt{3} & 0 & -2\end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{24\sqrt{3}}(-4\cdot 4\cdot(-2) - (-2\sqrt{3})\cdot(-2\sqrt{3})\cdot 2) = -\frac{8}{24\sqrt{3}} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$