AL06 後期第 6 講義演習問題

I $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ とします．(x, y, z) が

$$ax + by + cz + d = 0$$

上を動くとき

$$f(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

の最小値が

$$d = \frac{(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

となることを示しましょう．ここでは幾何的に考えましょう．

解答 $\mathrm{P}_0(a, b, c)$ を通り平面 $ax + by + cz$ の法線ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする直線は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示されます．この直線と与えられた平面との交点を求めるために

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0$$

を解くと

$$t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

となります．従ってこの交点を P_1 とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

となります．よって

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}\right|^2 = \frac{(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

が平面 $ax+by+cz+d = 0$ 上の点 Q と $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ との間の距離の自乗の最小値となります.

II $g(x, y, z) = 0$ の下で $w = f(x, y, z)$ の極値問題を考えましょう．停留点を求めるだけで十分です.

(1)

$$g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0 \quad \text{の下で} w = f(x, y, z) = xyz$$

(2)

$$g(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 1 = 0 \quad \text{の下で} w = f(x, y, z) = x + y + z$$

(3)

$$g(x, y, z) = x - 2y + 3z - 1 = 0 \quad \text{の下で} w = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

解答 (1)

$$g_x = g_y = g_z = 1, \quad f_x = yz,\ f_z = xy,\ f_z = xy$$

となります．(x, y, z) で極値をもつとすると

$$\begin{cases} yz + \lambda & = & 0 & \cdots(1) \\ xz + \lambda & = & 0 & \cdots(2) \\ xy + \lambda & = & 0 & \cdots(3) \\ x + y + z & = & 1 & \cdots(4) \end{cases}$$

を満たす λ が存在します．(1), (2), (3) から

$$yz = xz = xy = \lambda$$

が必要であることが分かります．これからさらに

$$\begin{array}{rl} yz = xz \Leftrightarrow & z = 0 \text{ OR } x = y \cdots (5) \\ xz = xy \Leftrightarrow & x = 0 \text{ OR } y = z \cdots (6) \end{array}$$

となりますが，(5) かつ (6) を以下のように 4 つの場合に分けて考えます．

(i) $x = z = 0$ のとき(1), (2), (3) はいずれも $\lambda = 0$ と必要十分になります．このとき (4) から $y = 1$ が従います．以上から

$$(x, y, z, \lambda) = (0, 1, 0, 0)$$

(ii) $z = 0$ かつ $y = z$ のとき, すなわち $y = z = 0$ のとき (1), (2), (3) はいずれも $\lambda = 0$ と必要十分になります．このとき (4) から $x = 1$ が従います．以上から

$$(x, y, z, \lambda) = (1, 0, 0, 0)$$

(iii) $x = y$ かつ $x = 0$ のとき, すなわち $x = y = 0$ のとき (1), (2), (3) はいずれも $\lambda = 0$ と必要十分になります．このとき (4) から $z = 1$ が従います．以上から

$$(x, y, z, \lambda) = (0, 0, 1, 0)$$

(iii) $x = y$ かつ $y = z$ のとき$x = y = z$ となるので，(4) から $x = y = z = \frac{1}{3}$ となります．このとき $\lambda = -\frac{1}{9}$ で (1),(2),(3) も成立します．以上から

$$(x, y, z, \lambda) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9})$$

(2)

$$g_x = 4x^3,\ g_y = 4y^3,\ g_z = 4z^3$$
$$f_x = f_y = f_z = 1$$

となります．(x, y, z) で極値をとるとすると

$$\begin{cases} 1 + 4\lambda x^3 & = & 0 & \cdots (1) \\ 1 + 4\lambda y^3 & = & 0 & \cdots (2) \\ 1 + 4\lambda z^3 & = & 0 & \cdots (3) \\ x^4 + y^4 + z^4 & = & 1 & \cdots (4) \end{cases}$$

を満たす $\lambda\mathbf{R}$ が存在します．(1) において $\lambda = 0$ とすると $1 = 0$ となるので，$\lambda \neq 0$ であることが分かる．従って

$$x^3 = y^3 = z^3 = -\frac{1}{4\lambda} \qquad (5)$$

となるが，これから $x = y = z$ であることが分かる．これを (4) に代入すると

$$x = y = z = 3^{-\frac{1}{4}}$$

が従う．最後に (5) に代入すると

$$\lambda = -\frac{1}{4} \cdot x^{-3} = -\frac{1}{4} 3^{\frac{3}{4}}$$

となる．

(3)

$$g_x = 1,\ g_y = -2,\ g_z = 3$$

$$f_x = 2x,\ f_y = 2y,\ f_z = 2z$$

となります．(x, y, z) で極値をとるとすると

$$\begin{cases} 2x + \lambda & = & 0 & \cdots (1) \\ 2y - 2\lambda & = & 0 & \cdots (2) \\ 2z + 3\lambda & = & 0 & \cdots (3) \\ x - 2y + 3z - 1 & = & 0 & \cdots (4) \end{cases}$$

を満たす $\lambda\mathbf{R}$ が存在します．(1),(2),(3) から

$$x = -\frac{1}{2},\ y = \lambda,\ z = -\frac{3}{2}\lambda$$

と x, y, z が λ で表されますが，(4) に代入すると

$$-\frac{1}{2}\lambda - 2\lambda - \frac{9}{2}\lambda - 1 = 0$$

から $\lambda = \frac{1}{7}$ となります．これを (5) に代入して

$$x = \frac{1}{14},\ y = \frac{1}{7},\ z = \frac{3}{14},\ \lambda = -\frac{1}{7}$$

であることが示されました．