AL07 後期第 7 講義演習問題

I (x,y,z) が

$$\begin{cases} x-2y+z+1 &= 0 \\ x+y-z-2 &= 0 \end{cases} \tag{1}$$

を動くとき

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

の極値を求めましょう．可能ならば最小値を求めましょう．

解答 制約条件 (1) を x,y について解くと

$$\begin{cases} x-2y &= -z-1 \\ x+y &= z+2 \end{cases}$$

から

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -z-1 & -2 \\ z+2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{1}{3}\{(-z-1)+2(z+2)\} = \frac{1}{3}(z+3) \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z-1 \\ 1 & z+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{1}{3}\{(z+2)+(z+1)\} = \frac{1}{3}(2z+3) \end{aligned}$$

となるので，制約条件は直線で

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} z+3 \\ 2z+3 \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示されます．直線上の点 (x,y,z) に対して

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となる条件は

$$1\cdot(z+3)+2(2z+3)+3\cdot 3z=0$$

となります．これを解いて $z=-\frac{14}{9}$ となりますから条件を満たす点は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{3}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

となります．従って最小値は

$$\frac{1}{14^2}\left(11^2+8^2+9^2\right)=\frac{133}{113}$$

であることが分かります．

II 以下の制約条件付き極値問題を考えます．停留点を求めましょう．

(1)

$$\begin{cases} g_1(x,y,z) &= y^2+z^2-1 &= 0 \\ g_2(x,y,z) &= xz-3 &= 0 \end{cases}$$

の下で $w=f(x,y,z)=yz+zx$

(2)

$$\begin{cases} g_1(x,y,z) &= 3x+y+z-5 &= 0 \\ g_2(x,y,z) &= x+y+z-1 &= 0 \end{cases}$$

の下で $w=f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

(3)

$$\begin{cases} g_1(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2-1 &= 0 \\ g_2(x,y,z) &= y &= 0 \end{cases}$$

の下で $w=f(x,y,z)=x+y+z^2$

解答 (1)

$$\nabla(g_1)=\begin{pmatrix}0\\2y\\2z\end{pmatrix},\quad \nabla(g_2)=\begin{pmatrix}z\\0\\x\end{pmatrix},\quad \nabla(f)=\begin{pmatrix}z\\z\\x+y\end{pmatrix}$$

と計算されます．(x,y,z) で極大または極小であるとすると

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}z\\z\\x+y\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\2y\\2z\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}z\\0\\x\end{pmatrix} &= \vec{0} \quad \ldots\ldots(1)\\ y^2+z^2-1 &= 0 \quad \ldots\ldots(2)\\ xz-3 &= 0 \quad \ldots\ldots(3)\end{cases}$$

を満たす $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ が存在します．(1) の第 1 成分から

$$z(1+\mu)=0$$

が成立しますが，(3) から $z\neq 0$ が分かりますから $\mu=-1$ が必要であることが従います．このとき (1) の第 2, 第 3 成分から

$$\begin{cases} z+2\lambda y &= 0 \quad \ldots\ldots(4)\\ y+2\lambda z &= 0 \quad \ldots\ldots(5)\end{cases}$$

が分かります．(4)+(5) から

$$(y+z)(2\lambda+1)=0 \quad すなわち \quad y+z=0 \quad \mathrm{OR} \quad 2\lambda+1$$

となります．

(i) $\underline{y+z=0\ のとき}$(2) から

$$(y,z)=(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2})$$

となります．このときさらに (3) から $x=\pm3\sqrt{2}$ となります．未定乗数 λ は (4) から $\lambda=\frac{1}{2}$ であることが分かります．以上でこの場合，停留点は

$$(x,y,z,\lambda,\mu)=(\mp3\sqrt{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},-1)$$

（復号同順）

であることが分かります．

(ii) $\underline{2\lambda+1=0\ のとき}$$\lambda=-\frac{1}{2}$ となります．このとき (1) の第 2 成分から $y=z$ となります．(2) から

$$(y,z)=(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$$

であることが従います．さらに (3) から $x=\pm3\sqrt{2}$ を得ます．以上でこの場合，停留点は

$$(x,y,z,\lambda,\mu)=(\pm3\sqrt{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2},-1)$$

（復号同順）

であることが分かります．

(2)

$$\nabla(g_1)=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix},\quad \nabla(g_2)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \nabla(f)=\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}$$

と計算されます．(x,y,z) で極大または極小であるとすると

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} &= \vec{0} \quad \ldots\ldots(1)\\ 3x+y+z-5 &= 0 \quad \ldots\ldots(2)\\ x+y+z-1 &= 0 \quad \ldots\ldots(3)\end{cases}$$

を満たす $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ が存在します．(1) を

$$\begin{pmatrix}x&3&1\\y&1&1\\z&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\\lambda\\\mu\end{pmatrix}=\vec{0}$$

と考えると $\left(\begin{smallmatrix}2\\\lambda\\\mu\end{smallmatrix}\right)\neq\vec{0}$ から

$$0=\begin{vmatrix}x&3&1\\y&1&1\\z&1&1\end{vmatrix}=2(z-y)\ldots\ldots(4)$$

が従います．(4) を (2),(3) に代入すると

$$\begin{cases}3x+2y &= 5\\ x+2y &= 1\end{cases}$$

を得ますが，これを解くと $x=2, y=-\frac{1}{2}$ となります．そして $z=y=-\frac{1}{2}$ となります．(1) の第 1 成分，第 2 成分に代入して

$$\begin{cases}4+3\lambda+\mu &= 0\\ -1+\lambda+\mu &= 0\end{cases}$$

となりますが，これから $\lambda=-\frac{5}{2}, \mu=\frac{7}{2}$ となります．以上で停留点は

$$(x,y,z,\lambda,\mu)=(2,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{5}{2},\frac{7}{2})$$

となります．

(3)

$$\nabla(g_1)=\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix},\quad \nabla(g_2)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \nabla(f)=\begin{pmatrix}1\\1\\2z\end{pmatrix}$$

と計算されます．(x,y,z) で極大または極小であるとすると

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}1\\1\\2z\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} &= \vec{0} \quad \ldots\ldots(1)\\ x^2+y^2+z^2-1 &= 0 \quad \ldots\ldots(2)\\ y &= 0 \quad \ldots\ldots(3)\end{cases}$$

を満たす $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ が存在します．(1) の第 1 成分に (3) の $y=0$ を代入すると

$$1+\mu=0 \quad 従って\mu=-1$$

が必要であることが分かります．このとき (1) の第 2 成分から

$$z(\lambda+1)=0 \quad すなわち \quad z=0 \quad または \quad \lambda=-1$$

であることが分かります．

(i) $z=0$ のとき(2) に $y=z=0$ を代入すると $x=\pm1$ となります．このとき (1) の第 1 成分から

$$\lambda=\mp\frac{1}{2}$$

となります．以上でこの場合，停留点は

$$(x,y,z,\lambda,\mu)=(\pm1,0,0,\mp\frac{1}{2},-1) \quad （復号同順）$$

であることが分かります．

(ii) $\lambda=-1$ のとき (1) の第 1 成分から $x=\frac{1}{2}$ となります．このとき (2) に代入すると $z=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ となります．以上でこの場合，停留点は

$$(x,y,z,\lambda,\mu)=(\frac{1}{2},0,\pm\frac{\sqrt{3}}{2},-1,-1) \quad （復号同順）$$

であることが分かります．

III 以下の曲線の P_0 における接線の方向ベクトルを求めましょう．

(1)

$$\begin{cases} g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 0\\ g_2(x,y,z) = x-y+2z = 0\end{cases}$$

at $\mathrm{P}_0(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$.

(2)

$$\begin{cases} g_1(x,y,z) = x^2-y^2-z^2-1 = 0\\ g_2(x,y,z) = x+y+z = 0\end{cases}$$

at $\mathrm{P}_0(\frac{2}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$.

解答 (1)

$$\nabla(g_1)=\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix} \quad 従って \quad \nabla(g_1)(\mathrm{P}_0)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\quad \nabla(g_2)=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

である．P_0 における接線方向を $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とすると

$$\left(\nabla(g_1)(\mathrm{P}_0), \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}(p-q-r) \qquad = 0 \ldots\ldots (1)$$

$$\left(\nabla(g_2)(\mathrm{P}_0), \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}\right) = p-q+2r \qquad = 0 \ldots\ldots (2)$$

が成立します．従って (1) かつ (2) すなわち

$$\begin{cases} p-q-r &= 0\ldots\ldots(1)' \\ p-q+2r &= 0\ldots\ldots(2)' \end{cases}$$

を解くと $r=0,\ p=q$ となりますから

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ q \\ 0 \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が接線方向です.

(2)

$$\nabla(g_1) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix} \quad 従って \quad \nabla(g_1)(\mathrm{P}_0) = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \nabla(g_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．P_0 における接線方向を $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とすると

$$\left(\nabla(g_1)(\mathrm{P}_0), \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}(2p-q-r) \qquad = 0 \ldots\ldots (1)$$

$$\left(\nabla(g_2)(\mathrm{P}_0), \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}\right) = p+q+r \qquad = 0 \ldots\ldots (2)$$

が成立します．従って (1) かつ (2) すなわち

$$\begin{cases} 2p-q-r &= 0\ldots\ldots(1)' \\ p+q+r &= 0\ldots\ldots(2)' \end{cases}$$

を解くと $p=0,\ q=-r$ となりますから

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が接線方向です.