AL10 後期第 10 講義演習問題

I I を $\mathbf{R}$ の開区間とします. $f\colon I \to \mathbf{R}$ が凸関数であるとします. このとき $x_1, x_2, x_3 \in I$ が $x_1 < x_2 < x_3$ を満たすとき

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \overset{(*)}{\leq} \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \overset{(**)}{\leq} \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

を証明しましょう．最初の不等式 (*) は, x_2 を

$$x_2 = (1-t)x_1 + tx_3$$

と $0 < t < 1$ を満たす t を用いて表すとき

$$f(x_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_3)$$

が成立することを用います.

解答 $x_2 = (1-t)x_1 + tx_3$, $0 < 1 < t$ を満たす $t \in \mathbf{R}$ が存在します．このとき f が凸関数であることから

$$f(x_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_3)$$

が成立します．このとき

$$\begin{aligned}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} &\leq \frac{(1-t)f(x_1)+tf(x_3)-f(x_1)}{(1-t)x_1+tx_3-x_1} \\ &= \frac{t(f(x_3)-f(x_1))}{t(x_3-x_1)} = \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\end{aligned}$$

が成立します．他方

$$\begin{aligned}\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} &\geq \frac{f(x_3)-(1-t)f(x_1)-tf(x_3)}{x_3-(1-t)x_1-tx_3} \\ &= \frac{(1-t)(f(x_3)-f(x_1))}{(1-t)(x_3-x_1)} = \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\end{aligned}$$

も成立します.

II (2) $p > 1$ のとき $f(t) := t^p$ が $I = (0, +\infty)$ 上で狭義の凸関数であることを示しましょう.
(2) $x, y > 0,\ x \neq y,\ 0 < \alpha < 1$ のとき，不等式

$$((1-\alpha)x + \alpha y)^p \leq (1-\alpha)x^p + \alpha y^p$$

が成立することを証明しましょう.

解答 (1) $f'(t) = pt^{p-1}$, $f''(t) = p(p-1)t^{p-2} > 0$ が $t > 0$ に対して成立しますから，$f(t)$ は $I = (0, +\infty)$ 上狭義の凸関数であることが分かります.

(2) (1) から $0<a<b$ のとき

$$((1-t)a+tb)^p<(1-t)a^p+tb^p \quad (0<t<1)$$

が成立します.

$\underline{X<y \text{ のとき}}$ $x=a,\ y=b, \alpha=1-t$ として

$$(\alpha x+(1-\alpha)y)^p\le\alpha x^p+(1-\alpha)y^p$$

が従います.

$\underline{X>y \text{ のとき}}$ $x=b,\ y=a, \alpha=t$ として

$$(\alpha x+(1-\alpha)y)^p\le\alpha x^p+(1-\alpha)y^p$$

が従います.

III $f:\ (a,b)\to\mathbf{R}$ が凸関数とします.

$$U:=\{(x,y);\ a<x<b,\quad y>f(x)\}$$

が凸集合となることを示しましょう.

解答 $(x_0,y_0),(x_1,y_1)\in U$ とします. このとき

$$a<x_o,x_1<b,\quad f(x_0)<y_0,\quad f(x_1)<y_1$$

が成立します. $0<t<1$ を満たす $t\in\mathbf{R}$ に対して

$$x_t=(1-t)x_0+tx_1,\quad y_t=(1-t)y_0+ty_1$$

と定めて $P_t(x_t,y_t)\in U$ $(0<t<1)$ を示します.

(i) $\underline{x_0=x_1 \text{ のとき}}$ $x_t=x_0$ となります. このとき

$$y_0>f(x_0),\ y_1>f(x_1)=f(x_0)$$

が成立することから, $0<t<1$ のとき

$$y_t=(1-t)y_0+ty_1>(1-t)f(x_0)+tf(x_0)=f(x_0)=f(x_t)$$

から $P_t\in U$ が成立します.

(ii) $\underline{x_0\ne x_1 \text{ のとき}}$ $x_0<x_1$ としても一般性は失いません. このとき f が凸関数であることから $0<t<1$ のとき

$$f(x_t)\le(1-t)f(x_0)+tf(x_1)<(1-t)y_0+ty_1=y_t$$

から $P_t(x_t,y_t)\in U$ が成立します.

IV U_1, U_2 を $\mathbf{R}^2$ の凸集合とします. $U_1\cap U_2$ が凸集合となることを証明しましょう.

解答

$$P \in U_1 \cap U_2 \quad \Leftrightarrow \quad P \in U_1 \quad \text{AND} \quad P \in U_2$$

に注意しましょう．$P_0(x_0, y_0)$，$P_1(x_1, y_1) \in U_1 \cap U_2$ とします．$0 < t < 1$ を満たす $t \in \mathbf{R}$ に対して

$$x_t := (1-t)x_0 + tx_1, \quad y_t := (1-t)y_0 + ty_1$$

として P_t を定めます．$P_1, P_2 \in U_1$ で U_1 が凸集合であることから

$$P_t \in U_1 \quad (0 < t < 1)$$

が従います．さらに $P_1, P_2 \in U_2$ で U_2 が凸集合であることから

$$P_t \in U_2 \quad (0 < t < 1)$$

が従います．以上から

$$P_t \in U_1 \cap U_2 \quad (0 < t < 1)$$

が分かりますから，$U_1 \cap U_2$ は凸集合です.

V $\alpha, \beta > 0$ とします．第 1 象限 $\mathbf{R}^2_{++}$ 上の函数

$$u(x, y) := x^\alpha y^\beta$$

が凹関数である必要十分条件が

$$\alpha + \beta \leq 1$$

であることを示しましょう.

解答

$$f_x = \alpha x^{\alpha-1} y^\beta, \quad f_y = \beta x^\alpha y^{\beta-1}$$

$$f_{xx} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta, \quad f_{xy} = f_{yx} = \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1}, \quad f_{yy} = \beta(\beta-1)x^\alpha y^{\beta-1}$$

となります．これを用いて f の Hesse 行列式を求めると

$$\begin{aligned}
\det(H(f)(x,y)) &= \begin{vmatrix} \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta & \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} \\ \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} & \beta(\beta-1)x^\alpha y^{\beta-1} \end{vmatrix} \\
&= \alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1)x^{2(\alpha-1)}y^{2(\beta-1)} - \alpha^2\beta^2 x^{2(\alpha-1)}y^{2(\beta-1)} \\
&= \alpha\beta(1-\alpha-\beta)x^{2(\alpha-1)}y^{2(\beta-1)}
\end{aligned}$$

となります.

f が凹関数である必要十分条件は

$$f_{xx}(P), f_{yy}(P) \geq 0, \quad \det(F(f)(P)) \geq 0 \quad (P \in \mathbf{R}^2_{++})$$

です.

$$f_{xx}(x,y) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta \leq 0$$

が任意の $x, y \in \mathbf{R}_+$ に対して成立する条件は $\alpha \leq 1$ です．同様に

$$f_{yy} = \beta(\beta-1)x^\alpha y^{\beta-1} \leq 0$$

が任意の $x, y \in \mathbf{R}_+$ に対して成立する条件は $\beta \leq 1$ です．さらに

$$\det(H(f)(x,y)) = \alpha\beta(1-\alpha-\beta)x^{2(\alpha-1)}y^{2(\beta-1)} \geq 0$$

が任意の $x, y \in \mathbf{R}_+$ に対して成立する条件は $\alpha + \beta \leq 1$ です．以上で，f が凹関数である必要十分条件が

$$\alpha \leq 1,\ \beta \leq 1,\ \alpha + \beta \leq 1$$

であることが示されました．$\alpha, \beta > 0$ であるとき $\alpha + \beta \leq 1$ ならば $\alpha, \beta \leq 1$ が従いますから，この条件は

$$\alpha + \beta \leq 1$$

と必要十分です.

VII $\alpha, \beta > 0$ とします．第 1 象限 $\mathbf{R}^2_{++}$ 上の関数

$$u(x,y) := \alpha \log x + \beta \log y$$

が狭義の凹関数であることを示しましょう.

解答

$$u_x = \frac{\alpha}{x}, \quad u_y = \frac{\beta}{y}$$

$$u_{xx} = -\frac{\alpha}{x^2}, \quad u_{xy} = u_{yx} = 0, u_{yy} = -\frac{\beta}{y^2}$$

となります.

$$u_{xx} = -\frac{\alpha}{x^2} < 0$$

$$\det(H(u)(x,y)) = \begin{vmatrix} -\frac{\alpha}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\beta}{y^2} \end{vmatrix} = \frac{\alpha\beta}{x^2y^2} > 0$$

から u が第 1 象限 $\mathbf{R}^2_{++}$ 上狭義の凹関数であることが分かります.