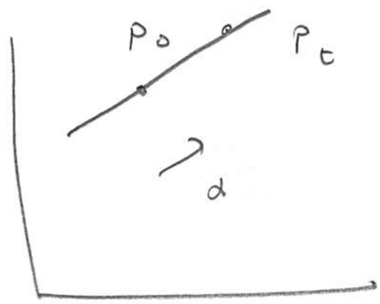
効用関数の最大化（その1）

$u : \mathbb{R}^2_{++} \longrightarrow \mathbb{R}$ を効用関数として

条件 $u_{xx}(P) < 0$, $\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{vmatrix}(P) > 0$

$(\forall P \in \mathbb{R}^2_{++})$

を仮定する.

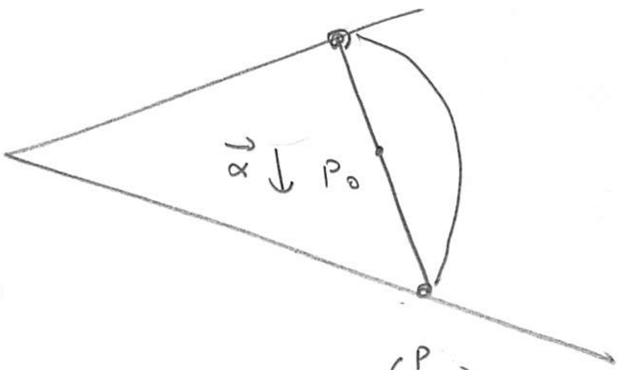


このとき $U(t) = u(P_0 + t\vec{\alpha})$

とすると $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ であるとき

$$U''(t) > 0$$

が常に成立する.

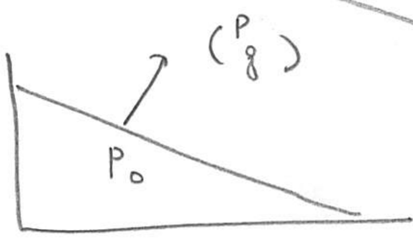


$P_0 \in U$ において

$$\begin{cases} u_x(P_0) + \lambda(-p) = 0 \\ u_y(P_0) + \lambda(-q) = 0 \end{cases}$$

$$I - px - qy = 0$$

が成立すると仮定する.



$$U(t) = u\left(qt, \frac{I}{q} - pt\right)$$

とすると

$$U'(t) = u_x\left(qt, \frac{I}{q} - pt\right) \cdot q + u_y\left(qt, \frac{I}{q} - pt\right)(-p)$$

P_0 で $t = t_0$ とすると

$$U'(t_0) = u_x(P_0) \cdot q + u_y(P_0)(-p)$$
$$= \lambda pq + \lambda q(-p) = 0$$

さらに $U''(t) < 0$ から

$$U(t) < U(t_0) \quad (t \neq t_0)$$

従って $u(P_t) < u(P_0) \quad (t \neq t_0)$

$u(x, y) = \sqrt{xy}$ のとき

$$u_x = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}, \quad u_y = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

$$u_{xx} = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{y}}{x\sqrt{x}}, \quad u_{xy} = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{xy}}$$

$$u_{yy} = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}$$

から $\det H(u) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{y}}{x\sqrt{x}} & \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{xy}} \\ \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{xy}} & -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{x}}{y\sqrt{y}} \end{vmatrix} = 0$

となりこの場合はこの議論は使えない.