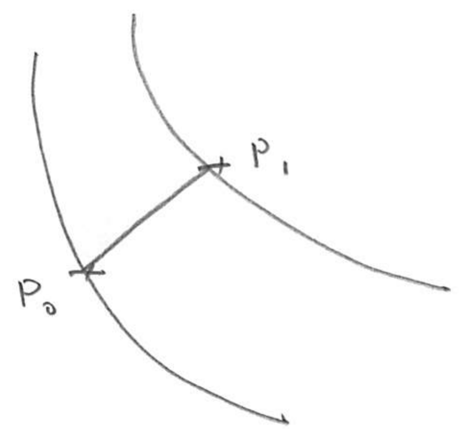
効用関数の最大化（その2）

$u : \mathbb{R}^2_{++} \longrightarrow \mathbb{R}$ を効用関数とします.

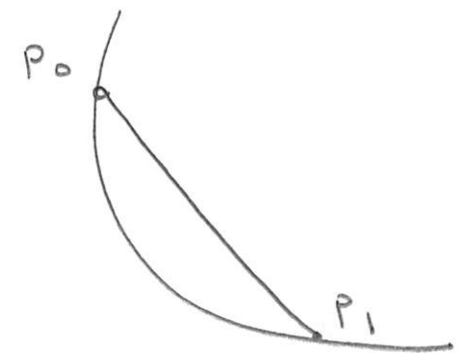
定義 u が $\mathbb{R}^2_{++}$ 上で狭義の準凹 (sqc) とは
$\forall p_0, \forall p_1 \in \mathbb{R}^2_{++}$ に対して

$$\left(p_0 \neq p_1,\ u(p_0) \leq u(p_1) \right.$$
$$\Rightarrow u((1-t)p_0 + t p_1) > u(p_0) \quad (0<t<1)$$

が成立するときです.



$u(p_0) < u(p_1)$ のとき



$u(p) = u(p_0) = u(p_1)$

定理 $\forall p \in \mathbb{R}^2_{++}$ に対して

$$u_x(p) \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & u_x(p) & u_y(p) \\ u_x(p) & & \\ u_y(p) & & H(u) \end{vmatrix} > 0$$

が成立する

$\Longrightarrow$ u は $\mathbb{R}^2_{++}$ で狭義の準凹

である.（証明は前で示してある）

例 $u(x,y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$

$$u_x = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}, \quad u_y = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$$

$$u_{xx} = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}}, \quad u_{xy} = \frac{1}{4} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}}, \quad u_{yy} = -\frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}}$$

から

$$\begin{vmatrix} 0 & u_x & u_y \\ u_x & u_{xx} & u_{xy} \\ u_y & u_{yx} & u_{yy} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{4} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{4} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{16} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} + 2 \times \frac{1}{16} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{16} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} > 0$$

$u_x \neq 0$

から uは狭義の準凹となります.

問

① $u(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$ が狭義準凹であることを示す.

② $u(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta}$ $(\alpha, \beta > 0)$ が狭義の準凹であるための条件を求める.

定理

$u : \mathbb{R}^2_{++} \longrightarrow \mathbb{R}$ 効用関数

が以下の条件を満たすと仮定します.

(0) $I, p, q > 0$

(1) $u_x(P) > 0, \quad u_y(P) > 0 \qquad (\forall P \in \mathbb{R}^2_{++})$

(2)
$$\begin{vmatrix} 0 & u_x(P) & u_y(P) \\ u_x(P) & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$H(u)(P)$}} \\ u_y(P) & & \end{vmatrix} > 0 \quad (\forall P \in \mathbb{R}^2_{++})$$

(3) (Lagrange)

$P_0(a, b) \in \mathbb{R}^2_{++}$ において.

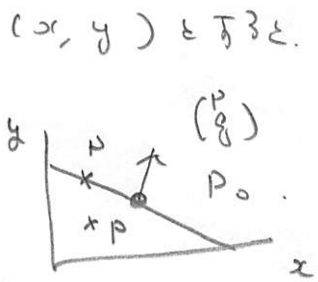
$$\begin{cases} I - pa - qb = 0 \\ \nabla(u)(P_0) - \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0 \quad (\exists \lambda \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \left(\left(\nabla(u)(P_0) \cdot \overrightarrow{P_0 P} \leq 0, \ P \neq P_0 \right) (\#) \Longrightarrow u(P) < u(P_0) \right)$$

注

(#) の条件は, $\nabla(u)(P_0) = \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ から $P(x, y)$ とすると.

$$\lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} = 0$$



となる. (0) と (3) から $\lambda > 0$ となるので

$$p(x - a) + q(y - b) = 0.$$

従って

$$px + qy \leq pa + qb = I.$$

となる

step 1 $y = \varphi(x)$ と $P_0(a, b)$ で $u(x, y) - u(a, b) = 0$

を満すと

$$\varphi'(x) = \frac{1}{u_y(P)^3} \begin{vmatrix} 0 & u_x(P) & u_y(P) \\ u_x(P) & & \\ u_y(P) & & H(u)(P) \end{vmatrix}$$

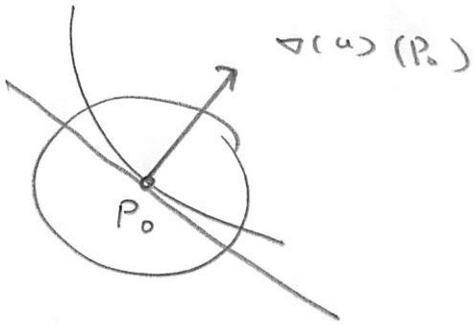
> 0

が (1), (2) から分かります. 従って $y = \varphi(x)$ は下に凸

P が P_0 の近くで $P \neq P_0$ のとき

$u(P) \geqq u(P_0)$

$\Longrightarrow \nabla(u)(P_0) \cdot \overrightarrow{P_0P} > 0$

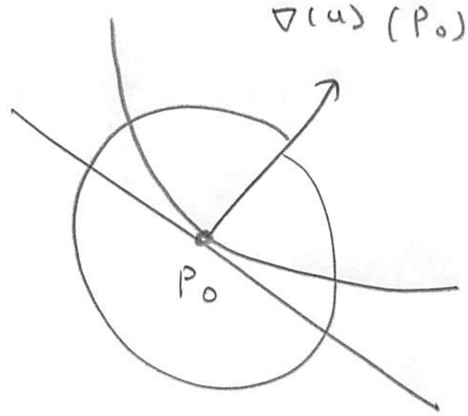


この対偶は P が P_0 の近くで $P \neq P_0$ のとき,

$$\nabla(u)(P_0) \cdot \overrightarrow{P_0P} \leqq 0 \Longrightarrow u(P) < u(P_0)$$

step 2. u が狭義の準凹であることを用いる.

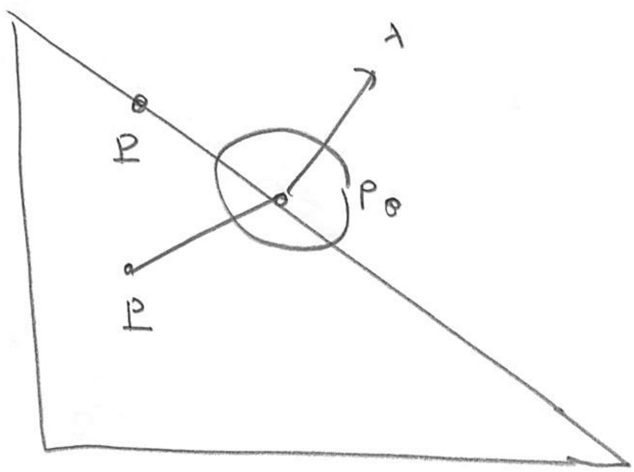
$$\lambda\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} = \nabla(u)(P_0)$$



step1. の結論は $\exists\delta>0$

$P\in B_\delta(P_0)$, $P\neq P_0$ のとき

$$\left(\begin{array}{l}\nabla(u)(P_0)\cdot\overrightarrow{P_0P}\le 0\\ \quad\Longrightarrow\ u(P)<u(P_0)\end{array}\right.$$



$\overrightarrow{P_0P}\cdot\nabla(u)(P_0)\le 0$ i.e. $\overrightarrow{P_0P}\cdot\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}\le 0$ とする.

$u(P)\ge u(P_0)$ とすると. u が狭義の準凹なので

$$u(P_0) < u((1-t)P_0+tP) \quad (0<t<1)$$

が成立する これは $t\sim 0$ のとき 矛盾.

従って $\underline{u(P) < u(P_0)}$

ewe+h2019
L04
13/15

$u(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$ のとき

$u_x = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} \neq 0 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2_{++}) \quad \cdots ①$

$u_y = \frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{3}} \neq 0$

から $u_{xx} = -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} y^{\frac{2}{3}}, \quad u_{xy} = \frac{2}{9} x^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{3}}, \quad u_{yy} = -\frac{2}{9} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{4}{3}}$

$$\begin{vmatrix} 0 & u_x & u_y \\ u_x & u_{xx} & u_{xy} \\ u_y & u_{yx} & u_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} & -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} y^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{9} x^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{3}} & \frac{2}{9} x^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{3}} & -\frac{2}{9} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{4}{3}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{8}{81} x^{-1} + 2 \times \frac{4}{81} x^{-1} + \frac{2}{81} x^{-1}$$

$$= \frac{18}{81} x^{-1} = \frac{2}{9} x^{-1} > 0 \quad \cdots ②$$

①, ② から $u(x, y)$ が $\mathbb{R}^2_{++}$ で狩義の準凹であることが分かる.