生産理論（費用最小化問題）

$f(x, y)$ を生産関数とします。第1生産要素，第2生産要素の価格を p, q とします。

$$z = f(x, y)$$

の下で生産費用 $px + qy$ を最小にすることを考えます。
Lagrange 関数

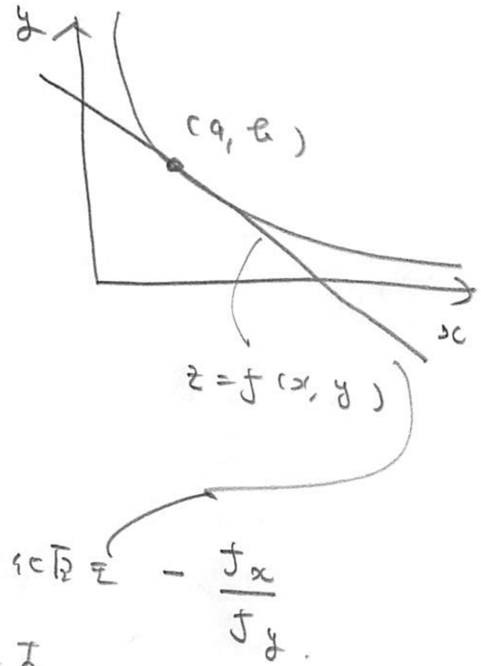
$$L(x, y, \lambda) = px + qy + \lambda(z - f(x, y))$$

を用いると (a, b) で極小ならば

$$\begin{cases} p - \lambda f_x(a, b) = 0 \\ q - \lambda f_y(a, b) = 0 \\ z - f(a, b) = 0 \end{cases}$$

これから

$$\frac{p}{q} = \frac{f_x}{f_y}$$



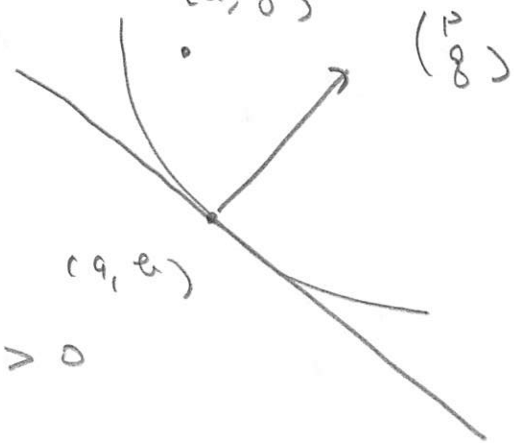
右辺の限界代替率が価格比に等しいことが分かります。

消費者理論の費用最小化問題と同様に

(*) $f_x > 0,\ f_y > 0$ 　 $\begin{vmatrix} 0 & f_x & f_y \\ f_x & & \\ f_y & & H(f) \end{vmatrix} > 0$

が成立するならば

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) \geqq f(a,b) \\ (x,y) \neq (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow px + qy > pa + qb$$



が成立します

(*) の十分条件として

$$f_x,\ f_y > 0,\quad f_{xx} < 0,\quad \det(H(f)) > 0$$

であることも同様です.

このとき陰関数定理が適用できて

$$\begin{cases} p - \lambda f_x(x, y) = 0 \\ q - \lambda f_y(x, y) = 0 \\ z - f(x, y) = 0 \end{cases}$$

は

$$x = x(p, q, z), \quad y = y(p, q, z), \quad \lambda = \lambda(p, q, z)$$

と解けます　ここで費用関数

$$C(p, q, z) = p\,x(p, q, z) + q\,y(p, q, z)$$

を定義すると包絡線定理から

$$\frac{\partial C}{\partial p} = x(p, q, z)$$

$$\frac{\partial C}{\partial q} = y(p, q, z)$$

が従います（Shepardの補題）

同様に

$$\frac{\partial C}{\partial z} = \lambda(p, q, z)$$

も成立します。（限界費用関数が未定乗数と等しい）

例) $f(x, y) = (x^\rho + y^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$ $(\rho > 0)$ を考える.

$$L = px + qy + \lambda(z - f(x, y))$$

として (x, y) で極値をとるならば

$$\begin{cases} L_x = p - \lambda f_x = 0 & (1) \\ L_y = q - \lambda f_y = 0 & (2) \\ L_\lambda = z - f(x, y) = 0 & (3) \end{cases}$$

$\log f(x, y) = \frac{1}{\rho} \log (x^\rho + y^\rho)$ の両辺を x, y で偏微分すると

$$\frac{f_x}{f} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\rho x^{\rho-1}}{x^\rho + y^\rho} = \frac{x^{\rho-1}}{x^\rho + y^\rho}, \quad \frac{f_y}{f} = \frac{y^{\rho-1}}{x^\rho + y^\rho}$$

から

$$f_x = x^{\rho-1}(x^\rho + y^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1}, \quad f_y = y^{\rho-1}(x^\rho + y^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1}$$

となります. (1), (2) に代入すると.

$$p = \lambda x^{\rho-1}(x^\rho + y^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1},\quad q = \lambda y^{\rho-1}(x^\rho + y^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1}$$

から $(x^\rho + y^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1} = \frac{p}{\lambda} x^{1-\rho}$, $(x^\rho + y^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1} = \frac{q}{\lambda} y^{1-\rho}$

この両辺を $\frac{1}{\rho} - 1 = \frac{1-\rho}{\rho}$ に注意して $\frac{1}{1-\rho}$ 乗すると

$$(x^\rho + y^\rho)^{\frac{1}{\rho}} = \left(\frac{p}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} x = \left(\frac{q}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} y.$$

となるので $z = f(x, y) = \left(\frac{p}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} x = \left(\frac{q}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} y$

となる.

$$x = z\left(\frac{\lambda}{p}\right)^{\frac{1}{1-\rho}},\quad y = z\left(\frac{\lambda}{q}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}$$

が従う. これを (3) に代入すると

$$z = \left\{ z^\rho \left(\frac{\lambda}{p}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} + z^\rho \left(\frac{\lambda}{q}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} \right\}^{\frac{1}{\rho}}$$

$$= z \cdot \lambda^{\frac{1}{1-\rho}} \left\{ \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} + \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} \right\}^{\frac{1}{\rho}}$$

から $\lambda^{\frac{1}{1-\rho}} = \left\{ \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} + \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} \right\}^{-\frac{1}{\rho}}$.

となる.

$$x = z \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} \left\{ \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} + \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} \right\}^{-\frac{1}{\rho}}$$

$$y = z \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} \left\{ \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} + \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} \right\}^{-\frac{1}{\rho}}$$

$$\lambda = \left\{ \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} + \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} \right\}^{-\frac{1-\rho}{\rho}}$$

ετσι.