3 次元固有値問題 (1)

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

V03c 2920 年 10 月 05,06 日 at HC, 経済数学入門・経済数学

復習

$$M_3(\mathbf{K}) = \{A;\ 3次正方行列\}$$

以下の定理は線型代数の基本である．

Theorem

定理 $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) \in M_3(\mathbf{K})$ に対して以下は同値である．

(1) A は正則である．

(2) $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して $A\vec{v} = \vec{0}$ ならば $\vec{v} = \vec{0}$

(2)' $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，$\vec{a}_3$ は 1 次独立である．

(3) $f_A:\ \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}^3$ は単射である．

(4) $f_A:\ \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}^3$ は全射である．

(5) $\det(A) \neq 0$

(6) $A \to \cdots \to I_3$ と行基本変形できる．

$\mathbb{K}=\mathbb{R}, \mathbb{C}$. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{K}^3$

$\boxed{A \in M_2(\mathbb{K})\text{でもOK}}$

Theorem

定理 $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) \in M_3(\mathbf{K})$ に対して以下は同値である.

(1) A は正則である.

(2) $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

(3) $\det(A) \neq 0$

$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ に $\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}}_{\text{自明解}}$ しか解がない.

$\forall \vec{v} \in \mathbb{K}^3$

特に

$$\overbrace{\exists \vec{v} \in \mathbf{K}^3\ A\vec{v} = \vec{0},\ \underset{\text{かつ}}{}\ \vec{v} \neq \vec{0}}^{\text{Not (2)}} \iff \overbrace{\det(A) = 0}^{\text{Not (3)}}$$

$\text{Not}(P_1 \Rightarrow P_2) \equiv P_1 \wedge \text{Not}(P_2)$

$\lambda I_3 - A$

A 正則 $\quad \tilde{A}$: 余因子行列

$A\vec{v} = \vec{0}$

$A^{-1}A\vec{v} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$

$\parallel$

$I_3\vec{v} = \vec{v}$

$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A| \cdot I_3$

$|A| \neq 0 \quad A\left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right) = \left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right)A = I_3$

$\underbrace{\frac{1}{|A|}\tilde{A}}_{= A^{-1}}$

$\left(A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}\right)$

$|AA^{-1}| = |I_3| = 1$

$\parallel$

$|A| \cdot |A^{-1}| \leadsto |A| \neq 0.$

$\det(A) \neq 0$

$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ クラメール

$|A| \neq 0$

$\leadsto x = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{vmatrix} = 0$

$\boxed{y = \quad = 0, \; z = \cdots = 0}$

3 の対偶 $|A| = 0 \Rightarrow \exists \vec{v} \in \mathbb{K}^3 \quad A\vec{v} = \vec{0},\ \vec{v} \neq \vec{0}$

$\underset{\sim\sim}{\vec{a}_1 = \vec{0}}$ $\quad A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1\cdot\vec{0} + 0\cdot\vec{a}_2 + 0\cdot\vec{a}_3 = \vec{0}$

$\neq \vec{0}$

$\underset{\sim\sim}{\vec{a}_1 \neq \vec{0}}$

$\underset{\sim\sim}{a_{11} \neq 0}$ $\quad A \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{B}} \end{pmatrix} = A_0$

$2r + = 1r \times \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$

$3r + = 1r \times \left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$

$\begin{pmatrix} 0 & \\ a_{21} & \\ a_{31} & \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{B}} \end{vmatrix}$

$= a_{11}|B|$

$a_{11} \neq 0$

$|B| = 0$

$\exists \begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad B\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} = \vec{0}.$

$a_{11} = 0$

$a_{21} \neq 0$

$x_1 = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}y + a_{13}z)$ とおくと

$a_{11} = a_{21} = 0$

$a_{31} \neq 0$

$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0} \iff \underset{\sim\sim}{A_0\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0}}$

3 次元の固有値問題

$(\alpha I_3 - A)\vec{v} = \vec{0}$

α は A の固有値 (eigen-value).

- $A \in M_3(\mathbf{K})$ とする．このとき $\alpha \in \mathbf{K}$ に対して

$$「A\vec{v} = \alpha\vec{v} \text{ を満たす } \vec{v}(\neq \vec{0}) \in \mathbf{K}^3 \text{ が存在する」}$$

$\Phi_A(\alpha)$

$$\Leftrightarrow \det(\alpha I_3 - A) = 0$$

- $\Phi_A(\lambda) := \det(\lambda I_3 - A) \in \mathbf{K}[\lambda]$ を A の固有多項式と呼ぶ．

eigen-polynomial

- $A = (a_{ij})$ とすると

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + C\lambda - \det(A)$$

定数.

- **問題** これはなぜか．C は求まるか．

$\Phi_A(0) = |-A| = |-\vec{a}_1 \ -\vec{a}_2 \ -\vec{a}_3|$ $= (-1)^3|A|$

演習問題.

$$|\lambda I_3 - A| = \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}}_{= (b_{ij}(\lambda))}$$

$B = (b_{ij})$

$$|B| = \sum_{\sigma\ \{1,2,3\}} \overset{\pm 1}{\varepsilon(\sigma)} \cdot b_{\sigma(1)1}\, b_{\sigma(2)2}\, b_{\sigma(3)3}$$

3!個の和 [illegible]

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline \text{行} & & \bigcirc & \\ & & & \\ & \bigcirc & & \bigcirc \end{array}$$

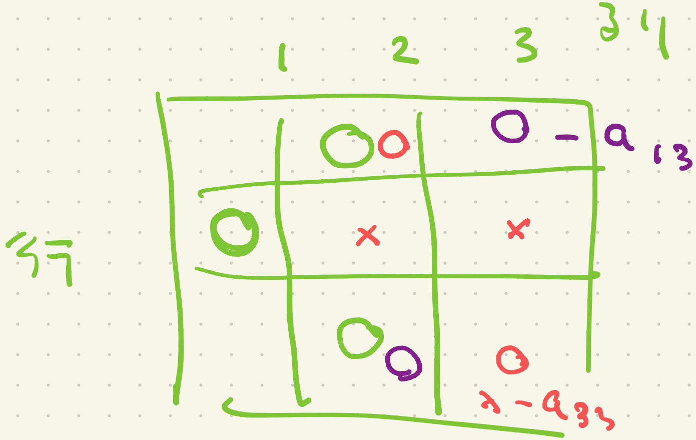
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ($(3\ 1\ 2)$ とも書く.)

$\sigma(1) = 3$

$\sigma(2) = 1$

$\sigma(3) = 2$

$b_{31}\ b_{12}\ b_{23}$



$$\lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + * \lambda + *$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})$$

$$\sigma \neq (\quad) \rightsquigarrow 0 \text{次 or } 1 \text{次}.$$

$$|\lambda I_3 - A| = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) + 1\text{次式}.$$

固有多項式の性質

- $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

定義

$$\mathrm{tr}(A) := a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

を A のトレース (trace) と呼ぶ.

- **定理** P が正則な 3 次正方行列であるとすると

$$\boxed{\Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) = \Phi_A(\lambda)}$$

- **証明**

$\lambda P^{-1} I_3 P = \lambda I_3$

左 $=$

$$\det(\lambda I_3 - P^{-1}AP) = \det(\boxed{P^{-1}\lambda I_3 P} - P^{-1}AP)$$
$$= \det(P^{-1}(\lambda I_3 - A)P)$$
$$= \boxed{\det(P^{-1})\,\boxed{\det(\lambda I_3 - A)}\,\det(P)} = \det(\lambda I_3 - A)$$

$= 1$

$\Phi_A(\lambda)$
$\parallel$

$$\boxed{|P^{-1}P| = |I_3| = 1}$$

固有多項式の性質（２）

- 系

$$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$$

$$\det(P^{-1}AP) = \det(A)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad \text{正則}$$

$$\boxed{P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^{-1} A P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

代数学の基本定理

$a_{\ell-1}, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$

- **定理**　複素係数の多項式

$$f(\lambda) = \lambda^{\ell} + a_{\ell-1}\lambda^{\ell-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \in \mathbf{C}[\lambda]$$

は

$$f(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)\cdots(\lambda - \alpha_\ell)$$

と 1 次式の積に分解できる（$\alpha_j \in \mathbf{C}$）.

- $A \in M_3(\mathbf{K})$ とすると

$\mathbb{C}$
$\mathbb{R}$

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$
とできるとは
限らない.

と因数分解できる．ただし $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$.

対角化の十分条件

$A \in M_3(\mathbb{K})$ $\mathbb{R}$

$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$

定理 1 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ とする．このとき

α, β, γ は $\Phi_A(\lambda)$ の単純根．

$\mathbb{R}$

$$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha$$

ならば正則な $P \in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP$$

を対角行列とできる．

定理 1 の証明 (1)—定理 2

$\Phi_A(\alpha)=0 \iff |\alpha I_3 - A| = 0$

$\iff \exists \vec{v} \in \mathbb{K}^3 \quad A\vec{v} = \alpha\vec{v}, \ \vec{v} \neq \vec{0}.$

定理 2 $A \in M_3(\mathbf{K})$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$, $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{K}^3$ が以下の条件を満たすとします.

$$\alpha \neq \beta,\ \ \beta \neq \gamma,\ \ \gamma \neq \alpha$$

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1,\ \ A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2,\ \ A\vec{p}_3 = \gamma\vec{p}_3$$

$$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \neq \vec{0}$$

固有ベクトル

$(A - \gamma I_3)\vec{p}_3 = \vec{0}$

このとき $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ は正則となります.

$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ は線型独立.

$\Updownarrow$

$(c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0)$

$(A-\gamma I_3)(c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3) = \boxed{c_1(A-\gamma I_3)\vec{p}_1} + c_2(A-\gamma I_3)\vec{p}_2 + c_3(A-\gamma I_3)\vec{p}_3$

$= \alpha\vec{p}_1 - \gamma\vec{p}_1$

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0} \qquad (1)$$

とします．(1) の両辺に $A-\gamma I_3$ を掛けると

$c_1 = c_2 = 0 \rightarrow c_3\vec{p}_3 = \vec{0} \rightarrow c_3 = 0$

$$c_1(\alpha-\gamma)\vec{p}_1 + c_2(\beta-\gamma)\vec{p}_2 = \vec{0} \qquad (2)$$

$\vec{p}_3 \neq \vec{0}$

さらに (2) の両辺に $A-\beta I_3$ を掛けると

$(A-\beta I_3)\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1 - \beta\vec{p}_1 = (\alpha-\beta)\vec{p}_1$

$(A-\beta I_3)\vec{p}_2 = \vec{0}$

$(A-\alpha I_3)$

$$c_1(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)\vec{p}_1 = \vec{0}$$

$\vec{p}_1 \neq 0$ から $c_1 = 0$ が従う．

$c_2(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)\vec{p}_2 = \vec{0}$

$\alpha \neq \gamma,\ \alpha \neq \beta. \rightarrow c_2 = 0.$

□

定理 1 の証明 (3)

定理 1 の状況で，ある $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{K}^3$ が存在して

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1,\ A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2,\ A\vec{p}_3 = \gamma\vec{p}_3$$

$$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{K}^3$$

$\vec{p}_1 \neq \vec{0}$
$\vec{p}_2 \neq \vec{0}$
$\vec{p}_3 \neq \vec{0}$

が成立します．

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (\alpha\vec{p}_1\ \beta\vec{p}_2\ \gamma\vec{p}_3)$$
$$= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\boxed{\begin{pmatrix}\alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma\end{pmatrix}} = P\begin{pmatrix}\alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma\end{pmatrix}$$

ここで定理 2 から P が正則であることが分かりますから，定理 1 が証明されます．

$= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma\end{pmatrix}$

具体例 (1)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ を対角化します．(確認問題)

固有多項式

$$\Phi_A(\lambda) = |\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

具体例 (2)—固有多項式

行基本変形

$\lambda I_3 - A$

1行 += 3行 × (−1)

$(\lambda-1)(1\ 0\ -1)$

$(-2\ 0\ 2) \to (1\ 0\ -1)$

$(0\ 0\ 0) \to (1\ 0\ -1)$

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \boxed{2} \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & \boxed{1-\lambda} \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

λ = 1 のときは大丈夫.

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

2行 += 1行 × (−1)

から A の固有値は $\lambda = -1, 1, 2$ であることが分かります.

λ = 1 のときは ここにくる λ

余因子展開.

λ = 2 のときは ここにくる λ.

具体例 (3)—固有ベクトル

(i) $\lambda = -1$ のとき行列式の計算における行基本変形を用いると

$$(-I_3 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad (\#1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

であることが分かります．さらに

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

と行基本変形できますから　　係数階段行列.

$$(\#1) \Leftrightarrow x = z, \ \ y = 0$$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{p}_1 = -\vec{p}_1$$

であることが分かります．

具体例 (4)—固有ベクトル

(ii) $\underline{\lambda = 1\ のとき}$ 上の行列式の計算の行基本変形を用いて

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad (\#2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

において

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

狭義の階段行列

と行基本変形できますから

$$(\#2) \Leftrightarrow x - 3z = 0, \quad y - 2z = 0$$

$$A\vec{p_2} = \vec{p_2}$$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

$$\vec{p_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であることが分かります．

具体例 (5)—固有ベクトル

(iii) $\lambda = 2$ のとき 固有多項式を求めるために用いた行基本変形を用いると

$$(2I_3 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad (\#3)$$

において

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#1) \Leftrightarrow x = z, y = 3z$$

$A\vec{p_3} = 2\vec{p_3}$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

$\vec{p_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

であることが分かります．

具体例 (6)—対角化

ここでさらに　$\lambda = -1$　　　　1　　　　2

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3)$$

とすれば，相異なる固有値の固有ベクトルは線型独立ですから，P は正則となります．このとき

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2 \ A\vec{p}_3) = (-1 \cdot \vec{p}_1 \ 1 \cdot \vec{p}_2 \ 2 \cdot \vec{p}_3) \\ &= (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から　$P^{-1}\cdot$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

具体例 (6)—対角化

ここでさらに

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$$

とすれば，相異なる固有値の固有ベクトルは線型独立ですから，P は正則となります．このとき

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (-1 \cdot \vec{p}_1\ 1 \cdot \vec{p}_2\ 2 \cdot \vec{p}_3) \\ &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

具体例 (6)—対角化

ここでさらに

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$$

とすれば，相異なる固有値の固有ベクトルは線型独立ですから，P は正則となります．このとき

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (-1\cdot\vec{p}_1\ 1\cdot\vec{p}_2\ 2\cdot\vec{p}_3) \\ &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

具体例 (6)—対角化

ここでさらに

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3)$$

とすれば，相異なる固有値の固有ベクトルは線型独立ですから，P は正則となります．このとき

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2 \ A\vec{p}_3) = (-1 \cdot \vec{p}_1 \ 1 \cdot \vec{p}_2 \ 2 \cdot \vec{p}_3) \\ &= (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$