3 次元固有値問題 (2)

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

V05 2020 年 10 月 12,13 日 at HC for 経済数学入門，経済数学

具体例 (1)—固有方程式が重根をもつ場合

3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

の固有値と固有ベクトルを求めます.

具体例 (2)—固有方程式

$|\lambda I_3 - A|$

2r+=3r

$(\lambda-3)(0\ 1\ 1)$

λ=3 では まず…

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$(0\ 0\ 0)$　　$0\times$　　$(0\ 1\ 1)$

1r+=　2r×2

$$= (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)^2$$

$\ni (\lambda-3)$

λ=1 にすると　3r+=2r

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

から A の固有値は $\lambda = 1, 3$(重根) であることが分かります.

具体例 (3)—固有ベクトル

(i) $\lambda = 1$ のとき行列式の計算における行基本変形を用いると

$(I_3 - A)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0} \qquad (\#1)$$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0}$

であることが分かりますから

$$(\#1) \Leftrightarrow x = 2z,\ \ y = -z$$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2z\\-z\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \qquad (z \neq 0)$$

$A\vec{p}_1 = \vec{p}_1$

$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

であることが分かります．

具体例 (3)—固有ベクトル

rank$(3I_3 - A) = 1$.

$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

(ii) $\lambda = 3$ のとき 上の行列式の計算の行基本変形を用いて

$(3I_3 - A)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = {\color{red}3}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2&-2&-2\\0&0&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0} \Leftrightarrow x-y-z=0 \qquad (\#2)$$

$x = y + z$.

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+z\\y\\z\end{pmatrix}=y\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\vec{p}_2}+z\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\vec{p}_3} \qquad (y\neq 0 \text{ OR } z\neq 0)$$

であることが分かります．

$A\vec{p}_2 = 3\vec{p}_2$, $A\vec{p}_3 = 3\vec{p}_3$

$P = \begin{pmatrix}2&1&1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

$|P| = \begin{vmatrix}3&0&1\\-1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3&1\\1&1\end{vmatrix} = 2 \neq 0.$

部分空間とその直和 (1)

$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \Rightarrow \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in V$. + と・について閉じている.

$V, W \subset \mathbf{K}^n$ が部分空間とします．このとき

$$V + W := \{\vec{v} + \vec{w} \in \mathbf{K}^n;\ \vec{v} \in V,\ \vec{w} \in W\}$$

$\mathbb{K}^n$

も部分空間となります． (演習)
部分空間の和 $V + W$ が**直和**であるとは

$$\vec{v} \in V, \vec{w} \in W, \vec{v} + \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{w} = \vec{0}$$

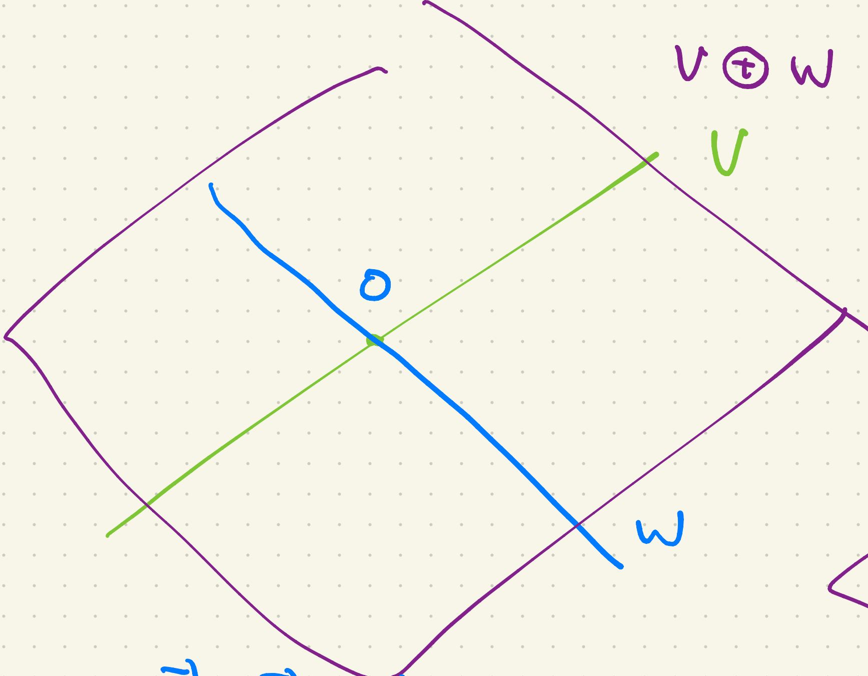
が成立するとき $V \oplus W$ と記します．

V+W を

\oplus

$V \oplus W$

$V + W$

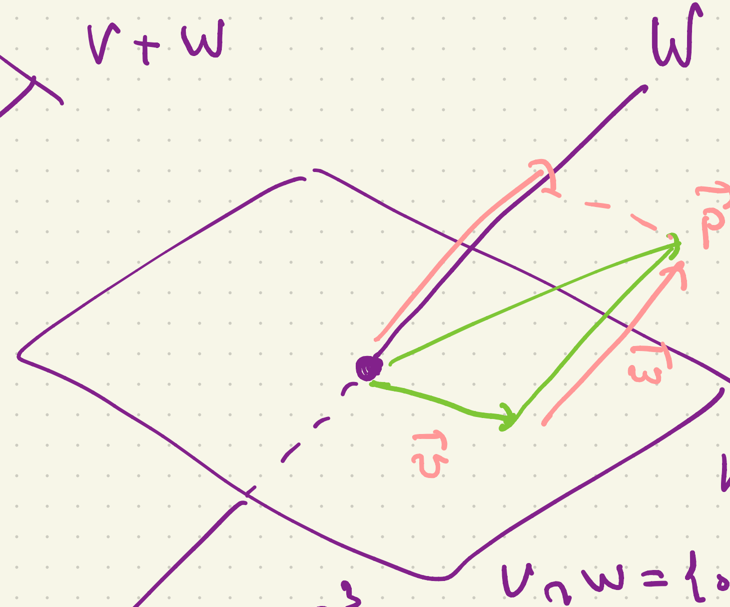


$\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{w} = \vec{0}$.

$\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$

$\underset{\in V}{\vec{v}} = \underset{\in W}{-\vec{w}} = \vec{0}$



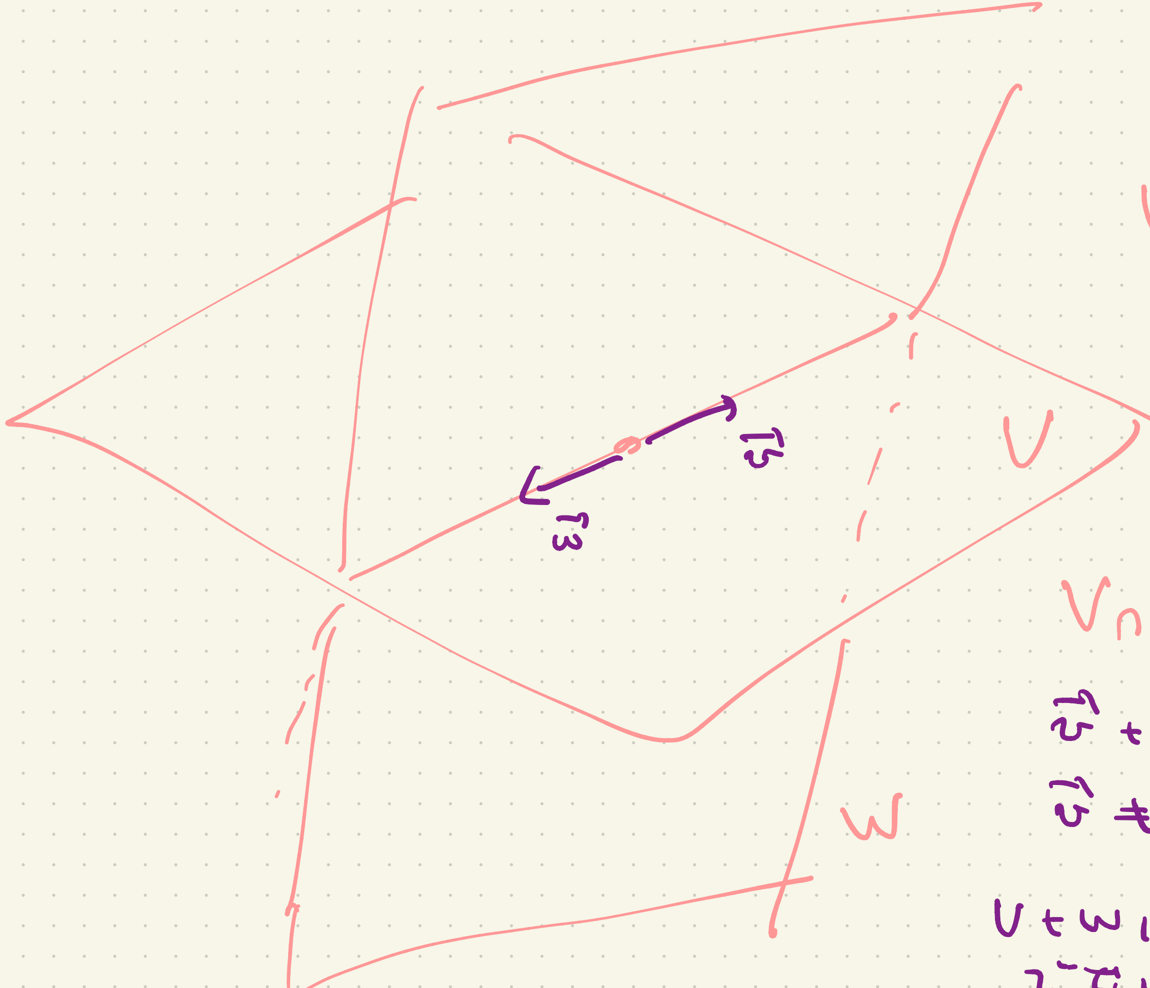
$V \oplus W = \mathbb{R}^3$

$V + W = \mathbb{R}^3$

$\vec{v} + \vec{w} = \vec{p}$

$\underline{V \cap W = \{0\}}$

$\oplus$ [illegible].



$\mathbb{R}^3$中

$V+W = \mathbb{R}^3$

$V \cap W \neq \{\vec{0}\}$

$\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$

$\vec{v} \neq \vec{0}, \vec{w} \neq \vec{0}$

$V+W$ は直和でない

部分空間とその直和 (2)

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}.$

n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbf{K})$, $\alpha \in \mathbf{K}$ に対して

$$V(\alpha) := \{\vec{v} \in \mathbf{K}^n ;\ A\vec{v} = \alpha\vec{v}\}$$

$\iff (\alpha I_n - A)\vec{v} = \vec{0}$

と定めます.

$= \mathrm{Ker}(\alpha I_n - A)$ 部分空間.

Theorem

$\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ が $\alpha \neq \beta$ を満たすならば

直和.

$$V(\alpha) \oplus V(\beta)$$

$B : m \times n.$

$\mathrm{Ker}(B) = \{ \vec{v} \in \mathbb{K}^n ; B\vec{v} = \vec{0} \}$ +と・について閉じている。(部分空間)

$\rotatebox{90}{$\in$}$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \rightarrow B\vec{v}_1 = B\vec{v}_2 = \vec{0}$

$$B(\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{線形性}}}{=} \lambda B\vec{v}_1 + \mu B\vec{v}_2 = \lambda \cdot \vec{0} + \mu \vec{0} = \vec{0}$$

$\rightarrow \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \in \mathrm{Ker}(B)$

Bの解空間.　Bの核

Kernel of B.

部分空間とその直和 (3)

$\vec{v}_1 \in V(\alpha)$, $\vec{v}_2 \in V(\beta)$ が

$$\overset{\vec{0}}{\overset{\shortparallel}{\vec{v}_1}} + \vec{v}_2 = \vec{0} \quad \to \quad \vec{v}_2 = \vec{0}. \tag{2}$$

を満たすとします．この両辺に $(A - \beta I_n)$ を掛けると

$$0 \neq \boxed{(\alpha - \beta)}\vec{v}_1 = \vec{0} \quad \text{従って} \quad \vec{v}_1 = \vec{0} \quad \Leftarrow$$

となります．これを (2) に代入して $\vec{v}_2 = \vec{0}$ も従います．

$$(A - \beta I_n)(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (A - \beta I_n)\vec{v}_1 + \underbrace{(A - \beta I_n)\vec{v}_2}_{\overset{\shortparallel}{\vec{0}}}$$

$$= \alpha \vec{v}_1 - \beta \vec{v}_1 = (\alpha - \beta)\vec{v}_1.$$

具体例 (4)—対角化

ここでさらに

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3)$$

$|P| \neq 0$ から正則.

P が正則 $\Longleftrightarrow |P| \neq 0$

$\Downarrow$

$\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}$ が線形独立.

と定めます．一般論によって $V(3)$

$$V(1) \oplus V(3)$$

が成立しますから，$\boxed{c_1\vec{p}_1} + \boxed{c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3} = \vec{0}$ とすると

$V(1)$

$$c_1\vec{p}_1 = \vec{0}, \ c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

となります．$\vec{p}_1 \neq \vec{0}$ から $c_1 = 0$ であることが分かります．

$c_1 = c_2 = c_3 = 0.$

$\vec{p_2} \nparallel \vec{p_3}$

$$c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} c_2 + c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

から $c_2 = c_3 = 0$ が従います．よって P は正則となります．

具体例 (5)—対角化

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (1\cdot\vec{p}_1\ 3\cdot\vec{p}_2\ 3\cdot\vec{p}_3)$$
$$= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\boxed{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}} = P\boxed{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}}$$

から　　　　　$P^{-1}\cdot$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

と A が対角化されます.

固有空間 (1)

$\mathbb{R}$ 　　　$\mathbb{R}$

部分空間の和, 直和.

- $A \in M_n(\mathbf{K})$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell \in \mathbf{K}$

$= \mathrm{Ker}(A - \alpha_i I_n)$

$$V(\alpha_i) := \{\vec{v} \in \mathbf{K}^n;\ A\vec{v} = \alpha\vec{v}\}$$

部分空間になっている.

$\Leftrightarrow (A - \alpha I_n)\vec{v} = \vec{0}$

- **定理** $\alpha_i \neq \alpha_j\ (i \neq j)$

$\ell = 2$は示している.

$$\vec{v}_i \in V(\alpha_i) \quad (i = 1, \cdots, \ell)$$

$$\vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_\ell = \vec{0}$$

$V(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus V(\alpha_\ell)$

ならば

$$\vec{v}_1 = \cdots = \vec{v}_\ell = \vec{0}$$

- 証明は ℓ の帰納法を用いる。

$\ell = 2 \Rightarrow \ell = 3$ を示す.

$\Phi_A(\alpha_i) \neq 0 \Rightarrow V(\alpha_i) = \{\vec{0}\}$

具体.

Kernel, 体.

固有空間 (2)

前ページの定理を $\ell = 3$ の場合に示します.

Theorem

$A \in M_n(\mathbf{K})$, $\alpha, \beta\, \gamma \in \mathbf{K}$ が

$$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha$$

を満たすとします. このとき

$$\vec{v}_1 \in V(\alpha),\ \vec{v}_2 \in V(\beta),\ \vec{v}_3 \in V(\gamma),\ \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$$

ならば $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_3 = \vec{0}$ が従います.

(一意性 ～ 意味は分かる)

$V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$

固空間分解の一意性

固有空間 (3)

$\vec{v}_3 \in V(\gamma) \rightsquigarrow (A-\gamma I_n)\vec{v}_3 = \vec{0}$

$(A-\gamma I_n)\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_1 - \gamma\vec{v}_1 = (\alpha-\gamma)\vec{v}_1$

$$\underbrace{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}_{} + \vec{v}_3 = \vec{0} \tag{3}$$

の両辺に $(A - \gamma I_n)$ を掛けると

3項目.

$$\underbrace{(\alpha-\gamma)\vec{v}_1}_{\in V(\alpha)} + \underbrace{(\beta-\gamma)\vec{v}_2}_{\in V(\beta)} = \vec{0}$$

となります．これから

$$\underbrace{(\alpha-\gamma)}_{\neq 0}\vec{v}_1 = \underbrace{(\beta-\gamma)}_{\neq 0}\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$\ell = 2$ の仮定

さらに

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{0}$$

となります．これを (3) に代入すると $\vec{v}_3 = \vec{0}$ も従います．

部分空間の和と直和

- $V_i \subset \mathbf{K}^n$ が部分空間とする $(i = 1, \cdots, \ell)$。このとき

$$V_1 + \cdots + V_\ell := \{\vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_\ell;\ \vec{v}_i \in V_i \quad (i = 1, \cdots, \ell)\} \subset \mathbf{K}^n$$

$\in \mathbf{K}^n$

は $\mathbf{K}^n$ の部分空間である。 問. $\ell = 2, 3$ の場合確認.

-

$$\vec{v}_i \in V_i (i = 1, \cdots, \ell), \quad \vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_\ell = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \cdots = \vec{v}_\ell = \vec{0}$$

が成立するとき、$V_1 + \cdots + V_\ell$ は**直和**といい

$$V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell$$

と記す。

固有空間分解 (0)—準備

スペクトル分解.

$\mathbb{K}^3$ 中.

($\mathbb{K}^n$ でも ok. $A \in M_n(\mathbb{K})$ でも)

$A \in M_3(\mathbf{K})$, $\alpha \in \mathbf{K}$ とします.

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)g(\lambda), \ g(\alpha) \neq 0$$

$\to$ $\Phi_A(\alpha) = 0$

$\lambda = \alpha$ は単純根.

ならば

$$\dim V(\alpha) = 1$$

$\exists \vec{p}_1$ をとる $\vec{p}_1 \in V(\alpha)$ $\rightsquigarrow$ $\dim V(\alpha) \geq 1$.

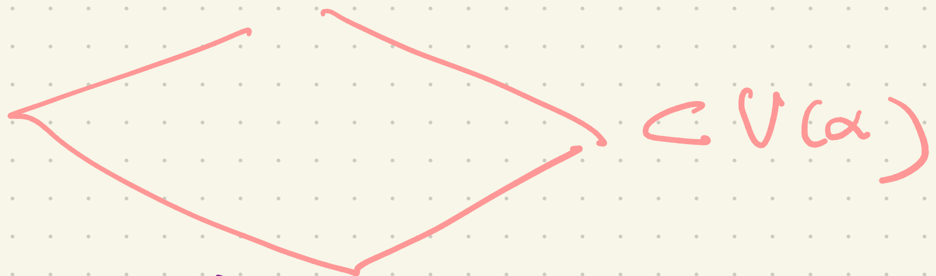
$\longrightarrow$ $\dim V(\alpha) = 1$.

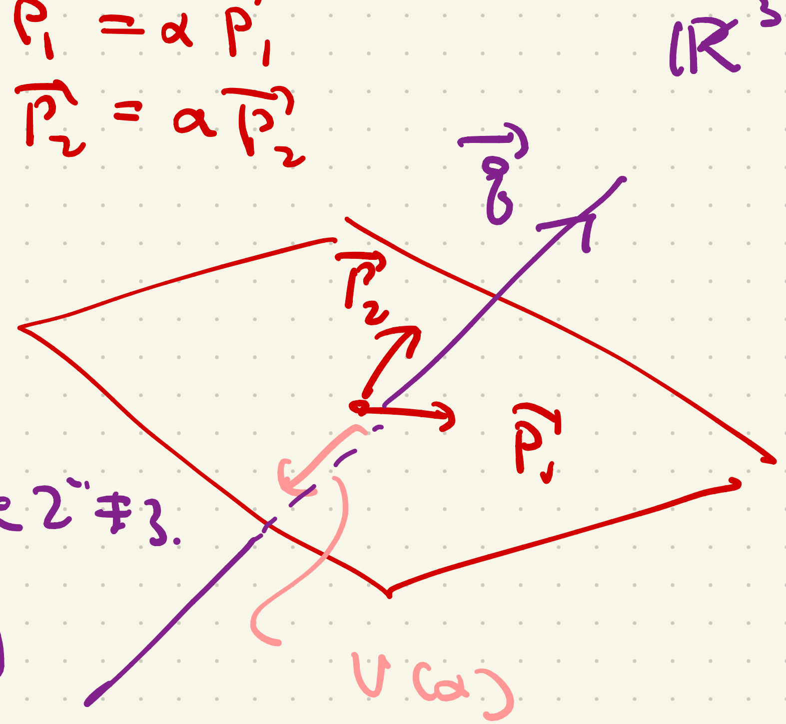
$\dim V(\alpha) \geq 2$ とする3重.

$\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in V(\alpha)$, $\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$. $\rightarrow$ $\vec{p}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{p}_2 \neq \vec{0}$

$A\vec{p}_1 = \alpha \vec{p}_1$

$A\vec{p}_2 = \alpha \vec{p}_2$





一般 $\longrightarrow$ $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{q}$ が線型独立とできる.
あんでは

$Q = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{q})$ 正則

$$AQ = (A\vec{q}_1\ A\vec{q}_2\ A\vec{q}_3) = (\alpha\vec{p}_1\ \alpha\vec{p}_2\ *_1\vec{p}_1 + *_2\vec{p}_2 + *_3\vec{p}_3)$$

$$= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{q}_3)\begin{pmatrix} \alpha & & *_1 \\ & \alpha & *_2 \\ & & *_3 \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} \alpha & & *_1 \\ & \alpha & *_2 \\ & & *_3 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \alpha & & *_1 \\ & \alpha & *_2 \\ & & *_3 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{Q^{-1}AQ}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-\alpha & & -*_1 \\ & \lambda-\alpha & -*_2 \\ & & \lambda-*_3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-\alpha)(\lambda-\alpha)(\lambda-*_3)$$

矛盾

$\lambda=\alpha$ が $\Phi_A(\lambda)$ の

単純根に矛盾.

Q : 3×3

$|Q| \neq 0 \iff Q$ 正則 $\iff \vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ は糸

L01. 最後の具体例.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Phi_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$\lambda = -1, 1, 2$ 固有値

$$\rightarrow\ V(-1) = \mathbb{K}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{p}_1},\ V(1) = \mathbb{K}\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{p}_2},\ V(2) = \mathbb{K}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{p}_3}$$

$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ は 正則

$$\mathbb{K}^3 \overset{=}{\underset{\subseteq}{\supseteq}} V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2)$$

$\forall \vec{v} \in \mathbb{K}^3 \qquad \vec{c} = P^{-1}\vec{v}.$

$$\vec{v} = P\vec{c} = P \cdot P^{-1}\vec{v} = \vec{v}$$

$$= \underbrace{c_1\vec{p}_1}_{\in V(-1)} + \underbrace{c_2\vec{p}_2}_{\in V(1)} + \underbrace{c_3\vec{p}_3}_{\in V(2)} \in V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2)$$

$$\mathbb{R}^3 = V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2)$$

$\mathbb{R}^3$ の A による固有値分解
(スペクトル分解
(A が対角化できるから)

① $\forall \vec{v} \in V$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

$\vec{v}_1 \in \underset{\vec{w}_1}{\underset{\cup}{V(-1)}}$, $\vec{v}_2 \in \underset{\vec{w}_2}{\underset{\cup}{V(1)}}$, $\vec{v}_3 \in \underset{\vec{w}_3}{\underset{\cup}{V(2)}}$ と書ける.

② 一意性.

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{w}_3$$

$$\leadsto \quad \vec{v}_1 = \vec{w}_1, \quad \vec{v}_2 = \vec{w}_2, \quad \vec{v}_3 = \vec{w}_3$$

$$\overbrace{(\vec{v}_1 - \vec{w}_1)}^{\vec{0}} + \overbrace{(\vec{v}_2 - \vec{w}_2)}^{(\vec{0})} + \overbrace{(\vec{v}_3 - \vec{w}_3)}^{\vec{0}} = \vec{0}$$

$\lambda = -1, 1, 2$

$$\underset{\mathbb{R}^3}{\overset{\vec{v}}{\cup}} = \underset{V(-1)}{\overset{\vec{v}_1}{\cup}} + \underset{V(1)}{\overset{\vec{v}_2}{\cup}} + \underset{V(2)}{\overset{\vec{v}_3}{\cup}}$$

$$\boxed{\vec{v}_3 = \underbrace{\frac{1}{3}(A^2 - I_3)}_{\text{射影行列}}\vec{v}.}$$

射影行列.

$f(2) = 1$

$f(-1) = 0$

$f(1) = 0$

$$f(\lambda) = \frac{(\lambda+1)(\lambda-1)}{(2+1)(2-1)}$$

$$= \frac{1}{3}(\lambda+1)(\lambda-1)$$

固有空間分解 (1)

$A \in M_3(\mathbf{K})$ に対して、固有値 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ が単純としよう。

$$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha$$

このとき

$\forall \vec{v}$

$$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$$

スペクトル分解.

$\| \qquad \| \qquad \|$

$\mathbb{K}\vec{p}_1 \qquad \mathbb{K}\vec{p}_2 \qquad \mathbb{K}\vec{p}_3$

$\vec{c} = P^{-1}\vec{v}$ とすると

$$P\vec{c} = PP^{-1}\vec{v} = \vec{v} = c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3$$

$$\in V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$$

固有空間分解 (2)

$\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

$$\vec{v}_1 \in V(\alpha),\ \vec{v}_2 \in V(\beta),\ \vec{v}_3 \in V(\gamma)$$

とすると $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ を $\vec{v}$ で表せるか。

固有空間分解 (3)

$A\vec{v} = \alpha\vec{v}$. $\leadsto$ $A^k\vec{v} = \alpha^k\vec{v}$

$A^2\vec{v} = A\alpha\vec{v}$

$= \alpha A\vec{v} = \alpha^2\vec{v}$

そのアイデア (1) $f(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$, $\vec{v} \in V(\alpha)$ に対して

$$f(A)\vec{v} = f(\alpha)\vec{v}$$ 」

$f(\lambda) = a_m\lambda^m + \cdots + a_1\lambda + a_0$

$f(A)\vec{v} = (a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 I_3)\vec{v}$

$= a_m\alpha^m\vec{v} + \cdots + a_1\alpha\vec{v} + a_0\vec{v}$

$= (a_m\alpha^m + \cdots + a_1\alpha + a_0)\vec{v} = f(\alpha)\vec{v}$.

そのアイデア (2)

$$\frac{(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\overset{= f(2)}{\boxed{\frac{(\lambda-\alpha)(\lambda-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}}}+\overset{= f(3)}{\boxed{\frac{(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}}}=1$$

$$f_1(x)=\frac{(x-\beta)(\lambda-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

$f_1(\alpha)=1$, $f_1(\beta)=f_1(\gamma)=0.$

$$f_1(A)\vec{v}=f_1(A)\underset{\substack{\uparrow\\ V(\alpha)}}{\vec{v_1}}+f_1(A)\vec{v_2}+f_1(A)\vec{v_3}$$

$$=\overset{1}{\overset{\parallel}{f_1(\alpha)}}\vec{v_1}+\overset{0}{\overset{\parallel}{f_1(\beta)}}\vec{v_2}+\overset{0}{\overset{\parallel}{f_2(\gamma)}}\vec{v_3}$$

$$=\vec{v_1}$$

$f_2(A)\vec{v}=\vec{v_2}$, $f_3(A)\vec{v}=\vec{v_3}$