接平面

曲面

$S: g(x, y, z) = 0$

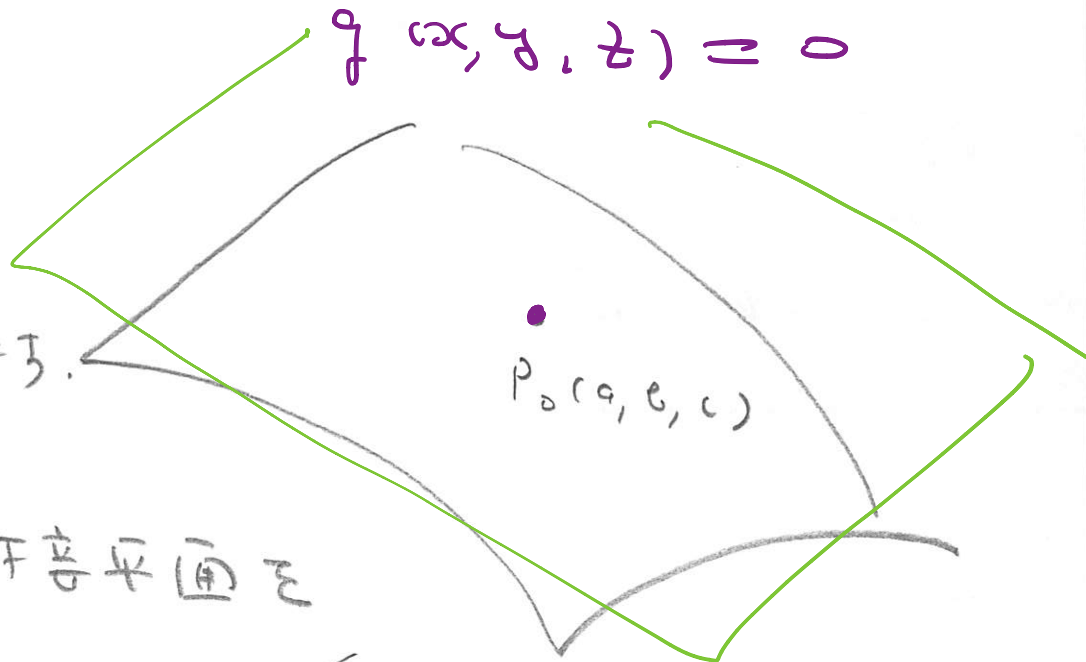
とその上の点$P_0(a, b, c)$があるとします。

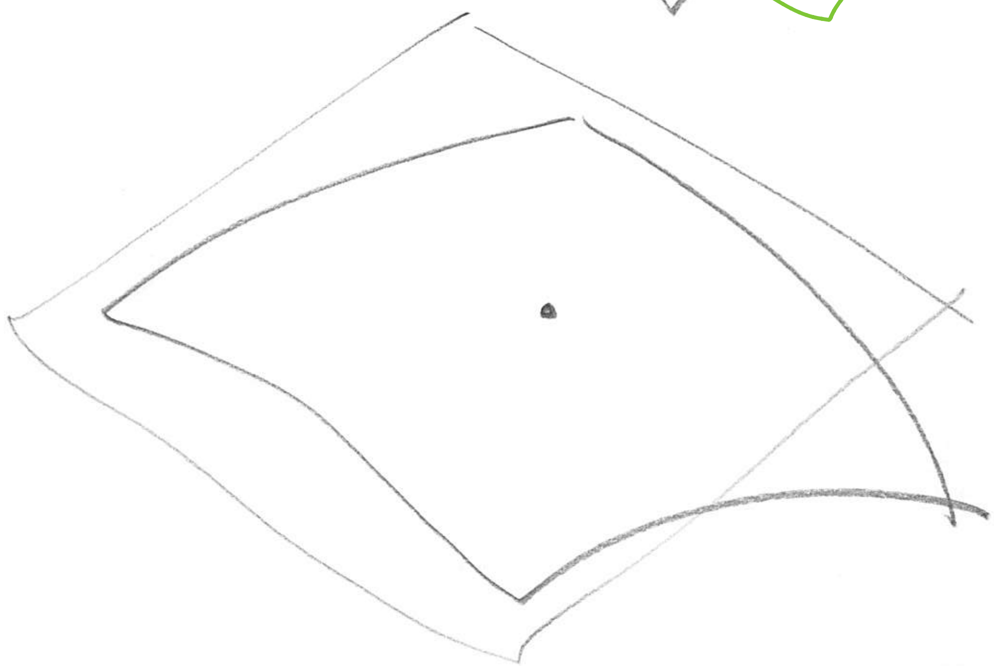
このとき$P_0(a, b, c)$におけるSの接平面を求めます。

以下では

$$g_z(P_0) \neq 0$$

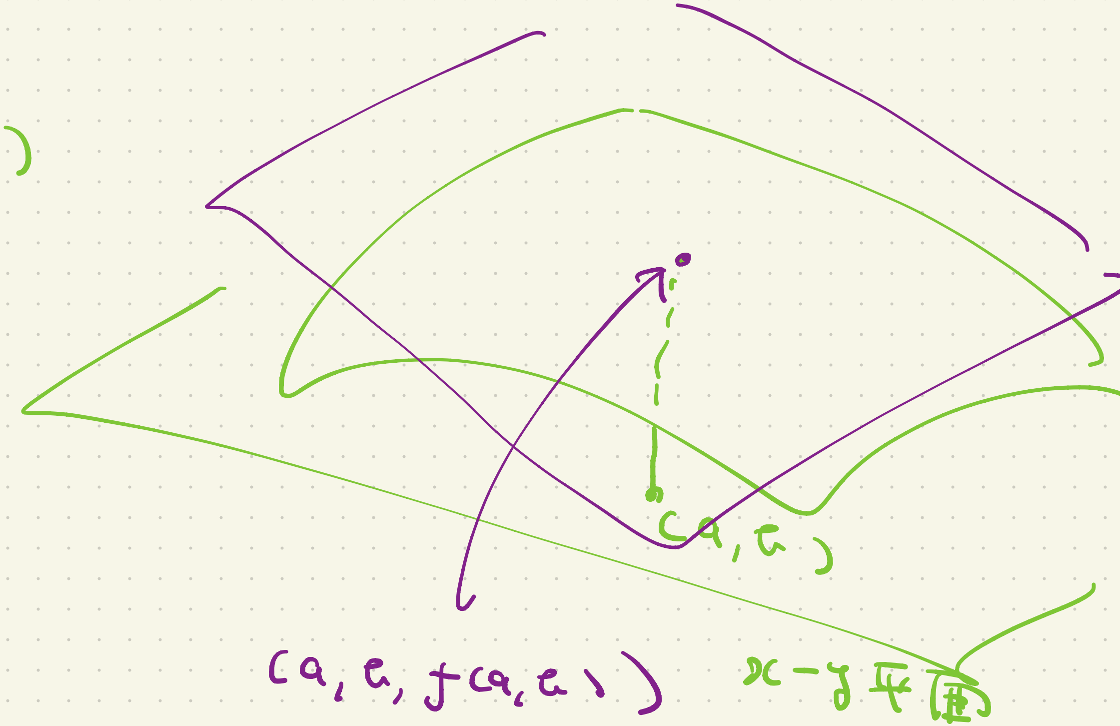
とします。





Surface

$z = f(x, y)$

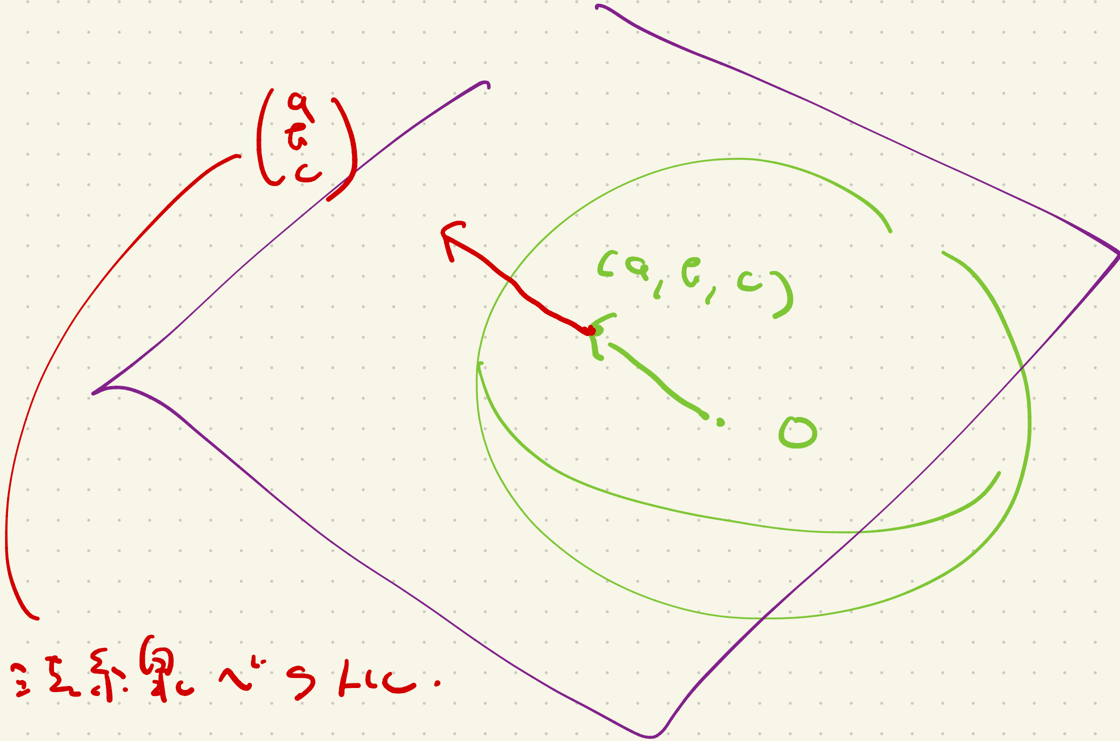


接平面は

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

単位球面

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$



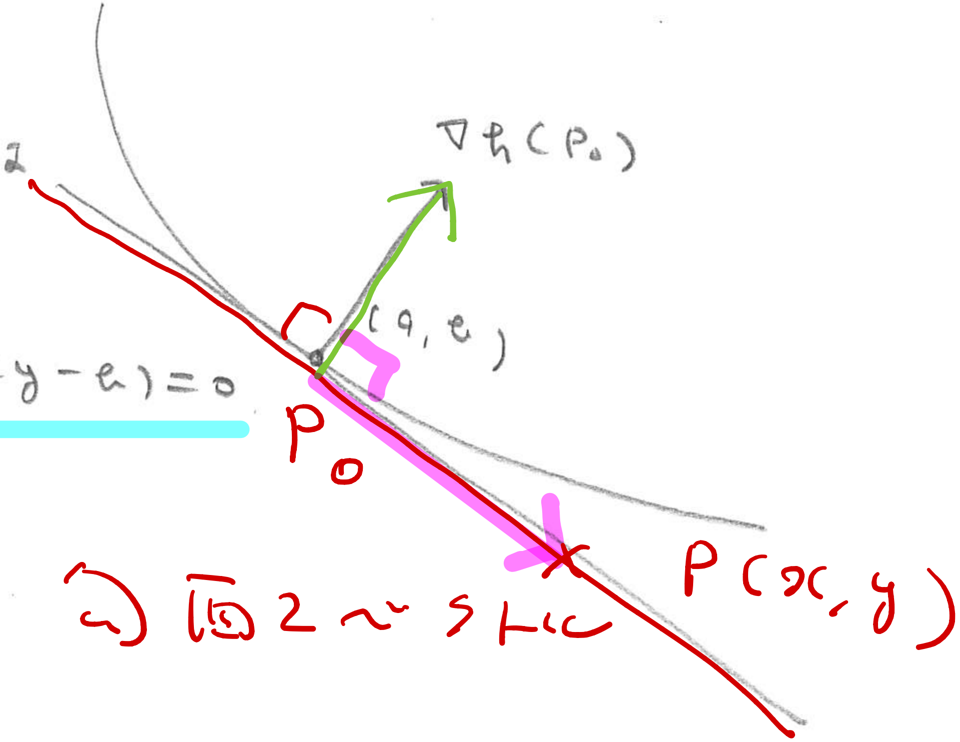
復習（2次元の場合：接線の方程式）

Curve　曲線.

$C: \; h(x, y) = 0$

上の点 $P_0(a, b)$ における接線は

$$h_x(P_0)(x-a) + h_y(P_0)(y-b) = 0$$



ここで

$$\nabla(h)(P_0) = \begin{pmatrix} h_x(P_0) \\ h_y(P_0) \end{pmatrix}$$

証明は

$$\left(\nabla(\cancel{g}\, h)(P_0), \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \right) = 0$$

垂直.

$h_y(P_0) \neq 0$ のとき

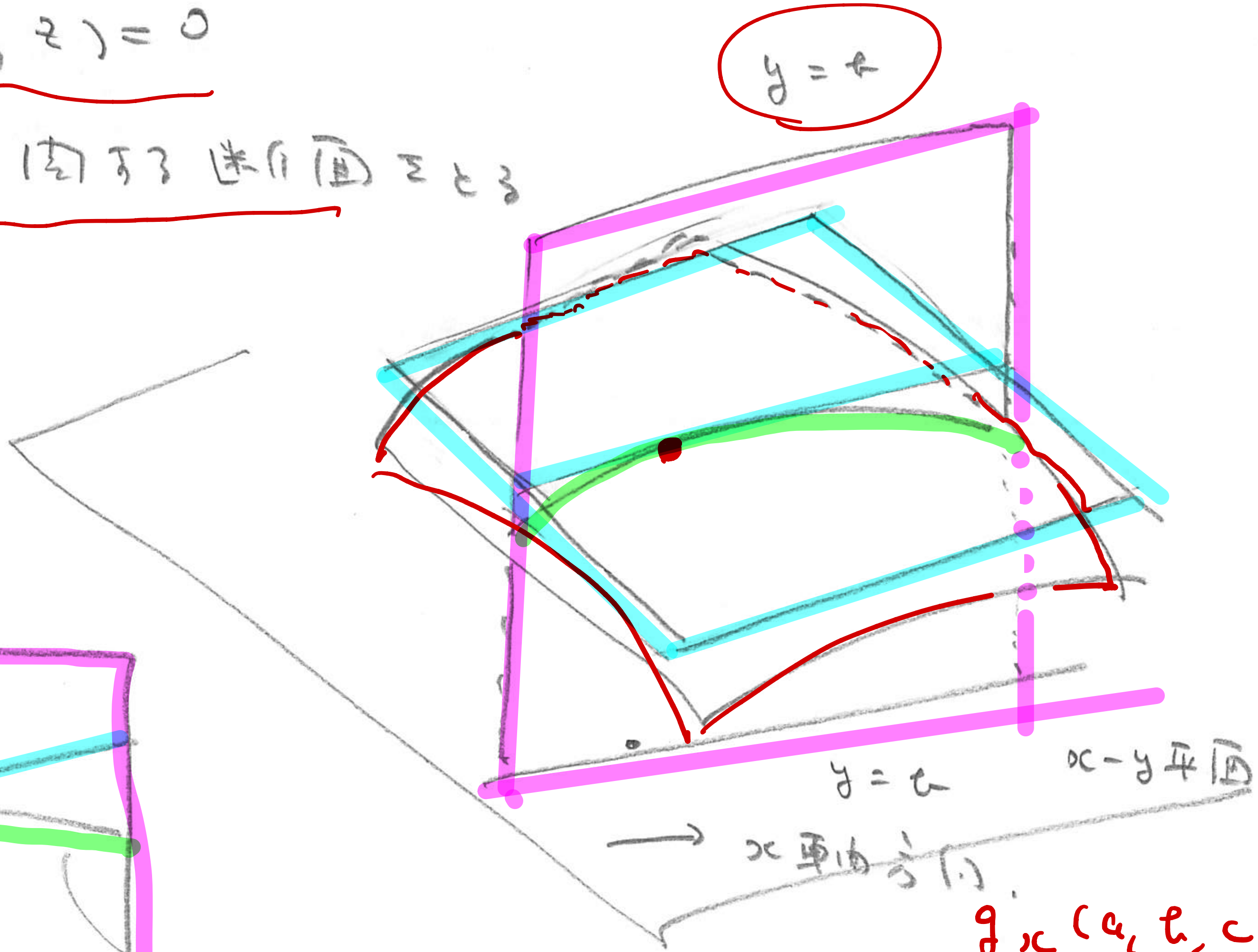
$$y = \boxed{-\frac{h_x(P_0)}{h_y(P_0)}}(x-a) + b.$$

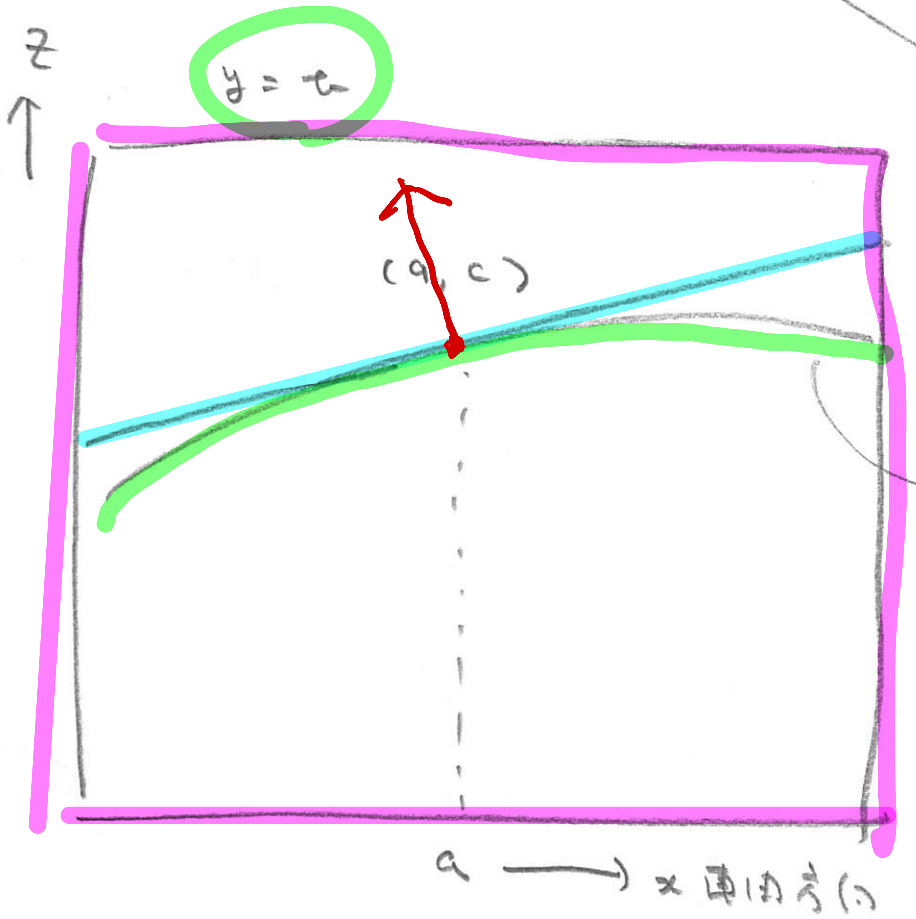
曲面 $S: g(x, y, z) = 0$

の平面 $y = t$ に関する断面をとる

$h(x, z) := g(x, t, z)$

とする





$h(x, z) = 0$

接線は $z = \boxed{-\frac{h_x(a,c)}{h_z(a,c)}}(x-a)+c$

$A = -\frac{h_x(a,c)}{h_z(a,c)} = -\frac{g_x(a,t,c)}{g_z(a,t,c)}$

接平面を $z = A(x-a) + B(y-b) + c$

と表す。その $y=b$ による断面は

$$z = A(x-a) + c$$

例題Iを考えると

$$A = -\frac{f_x(a, c)}{f_z(a, c)} = -\frac{g_x(a, b, c)}{g_z(a, b, c)}$$

同様に断面 $x=a$ を用いると

$$B = -\frac{g_z(a, b, c)}{g_z(a, b, c)}$$ y

$$p(x-a) + q(y-b) + r(z-c) = 0$$

従って接平面の方程式は

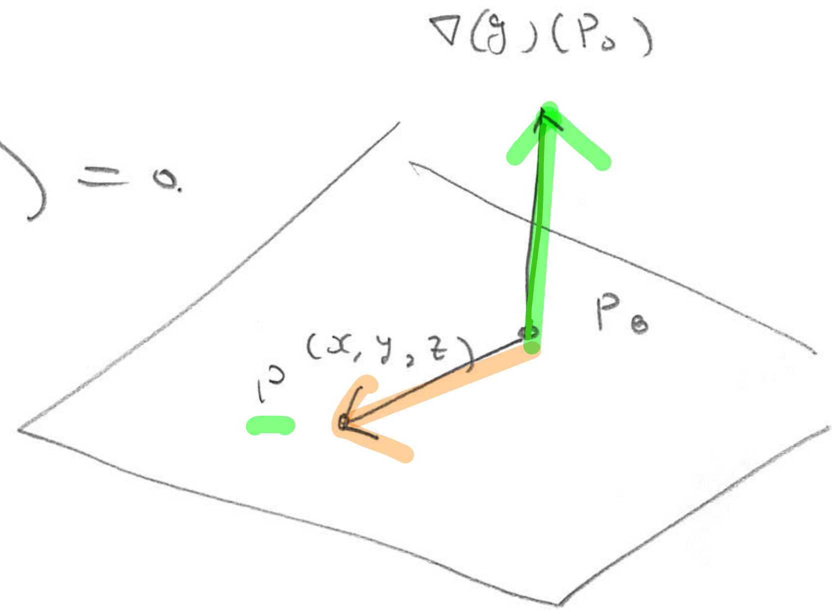
$$z = -\frac{g_x(P_0)}{g_z(P_0)}(x-a) - \frac{g_y(P_0)}{g_z(P_0)}(y-b) + c$$

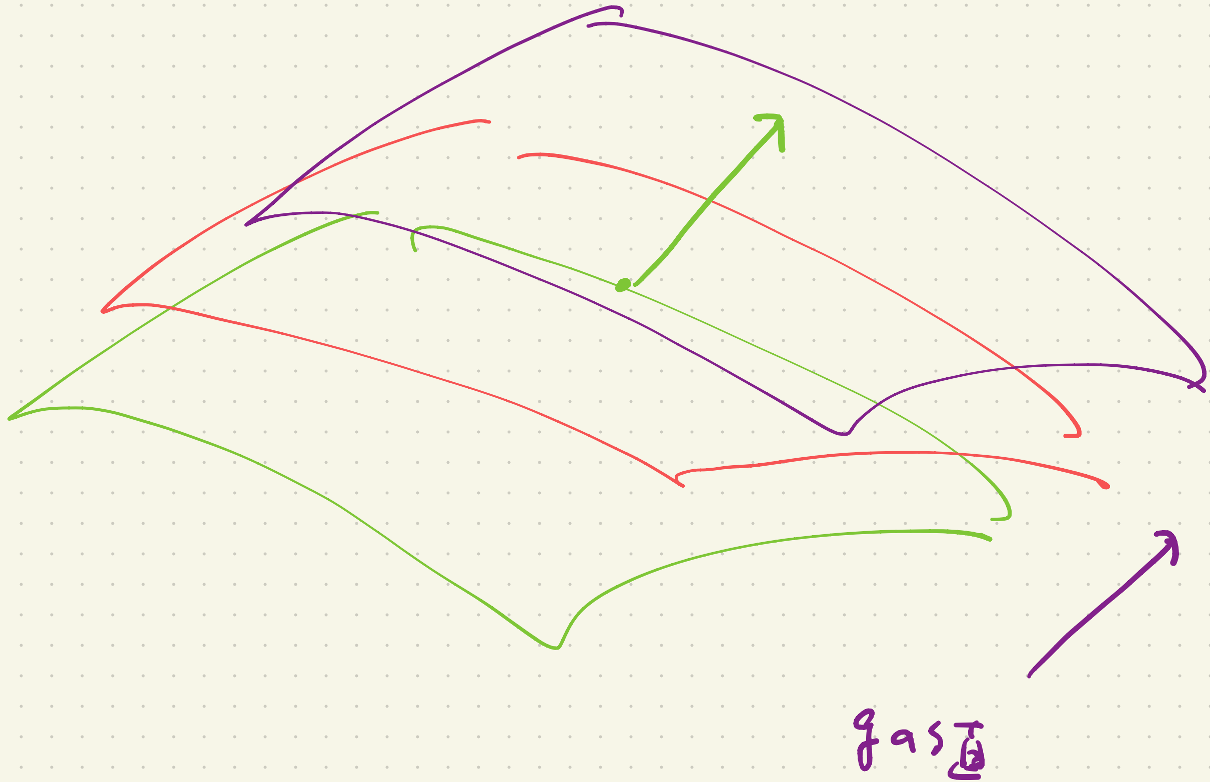
すなわち

$$g_x(P_0)(x-a) + g_y(P_0)(y-b) + g_z(P_0)(z-c) = 0$$

勾配ベクトル $\nabla(g) = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix}$ を用いると

$$\left(\nabla(g)(P_0), \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} \right) = 0.$$

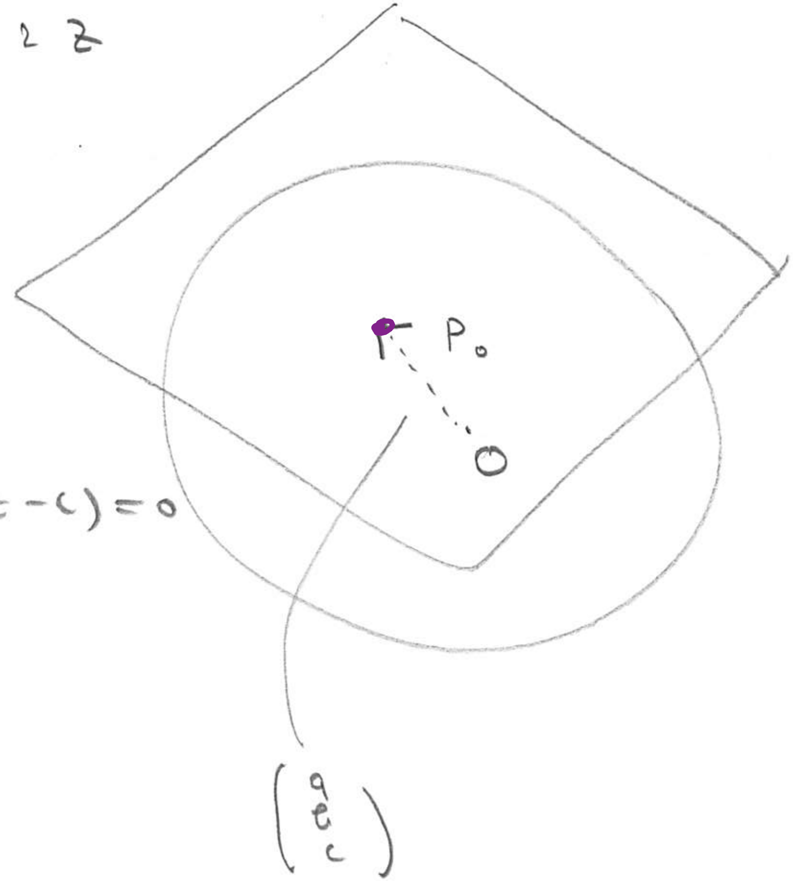



gas值

例) 単位球面 $S: g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

$$g_x = 2x, \quad g_y = 2y, \quad g_z = 2z$$

なので $P_0(a, b, c)$ における接平面は



$$2a(x-a) + 2b(y-b) + 2c(z-c) = 0$$

$a^2 + b^2 + c^2 = 1$ であることを用いると

$$ax + by + zc = 1$$

$$\nabla(g)(a, b, c) = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$