Lagrange の未定乗数法

3 変数 1 制約条件の場合

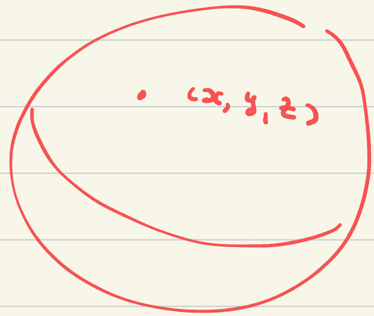
Nobuyuki TOSE

December 03, 2019
2020 経済数学・経済数学入門

制約条件の下の極値問題.

$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$ の下で

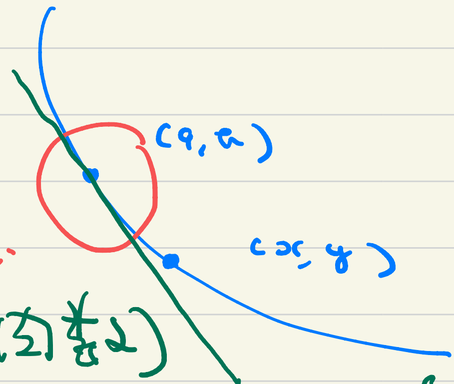
$w=f(x,y,z)=x+2y+3z$



2変数

$g(x,y)=0$ の下で $z=f(x,y)$

(a,b) で極小(大)とする



$g_y(a,b)\neq 0$ のとき (a,b) の近くで

$y=\varphi(x)$ (陰関数)

復習 $\varphi'(a) = -\dfrac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}$

$F(t) := f(t,\varphi(t)).$

chain Rule

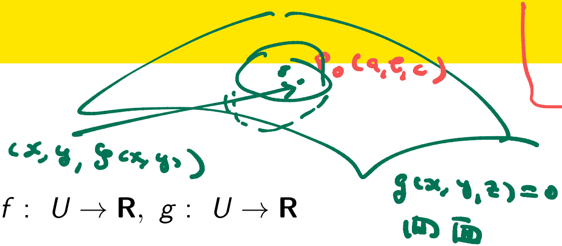
$\rightsquigarrow \quad F'(a)=0$

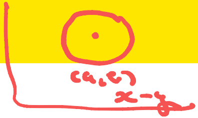
$\quad = f_x(a,\varphi(a))\cdot 1 + f_y(a,\varphi(a))\cdot\varphi'(a)$

$\exists\lambda\in\mathbb{R}.$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} f_x(a,b)+\lambda g_x(a,b)=0 \\ f_y(a,b)+\lambda g_y(a,b)=0 \\ g(a,b)=0. \end{cases}$$

問題





$\mathbf{R}^3$ の開集合 U 上の関数

$$f: U \to \mathbf{R}, \quad g: U \to \mathbf{R}$$

が与えられているとします.

$$\text{問題} \quad g(x,y,z) = 0 \quad \text{の下で} \quad w = f(x,y,z) \quad \text{を最大化・最小化}$$

極大　極小

$\mathrm{P}_0(a,b,c) \in U$ において

$$g_z(\mathrm{P}_0) \neq 0, \quad g(P_0) = 0$$

↑
8.

を仮定する.

陰関数定理

陰関数定理を用いると P_0 の近くで曲面 $g(x, y, z) = 0$ は

$$z = \varphi(x, y)$$

と表される.

$$F(x, y) := f(x, y, \varphi(x, y))$$

と定めると，P_0 で極大（極小）ならば

$$F_x(a, b) = F_y(a, b) = 0$$

Chain Rule

となる.

Chain Rule

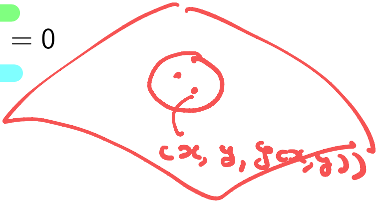
$F_x(a,b) = F_y(a,b) = 0$ $\quad$ $P_0(a,b,c)$

$g(x,y,z)=0$

F_x,F_y を求めると

$$\begin{cases} F_x(a,b) = f_x(\mathrm{P}_0) + f_z(\mathrm{P}_0) \cdot \varphi_x(a,b) = 0 \\ F_y(a,b) = f_y(\mathrm{P}_0) + f_z(\mathrm{P}_0) \cdot \varphi_y(a,b) = 0 \end{cases}$$

となる． $g(x,y,\varphi(x,y)) \equiv 0$ から



x と y で偏微分すると

$$g_x(\mathrm{P}_0) + g_z(\mathrm{P}_0) \cdot \varphi_x(a,b) = 0$$

$$g_y(\mathrm{P}_0) + g_z(\mathrm{P}_0) \cdot \varphi_y(a,b) = 0$$

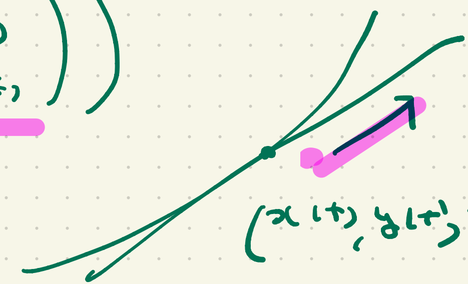
となるから

$$\varphi_x(a,b) = -\frac{g_x(\mathrm{P}_0)}{g_z(\mathrm{P}_0)}, \quad \varphi_y(a,b) = -\frac{g_y(\mathrm{P}_0)}{g_z(\mathrm{P}_0)},$$

$$F(t) = f(\overbrace{x(t), y(t), z(t)}^{P_t})$$

$$\longrightarrow \quad F'(t) = f_x(P_t)\cdot x'(t) + f_y(P_t)\cdot y'(t) + f_z(P_t)\cdot z'(t)$$

$$= \left(\nabla(f)(P_t), \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} \right)$$



$(x(t), y(t), z(t))$

$$w = f(\underline{x}, \underset{\sim}{y}, g(\underline{x}, \underset{\sim}{y})) = F(x, y)$$

x で 　偏微分する → y は止める
y で 　　　　　　　　x は止める.

$$F_x = f_x(\quad)\cdot 1 + f_y(\quad)\cdot \underset{\sim}{0} + f_z(\ )\cdot \frac{\partial g}{\partial x}.$$

(a, b) とおく

$$F_x(a, b) = f_x(a, b, c)\cdot 1 + f_y(a, b, c)\cdot 0$$

$$g(a, b) = c$$

$$+ f_z(a, b, c)\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)$$

$$= f_x(a, b, c) + f_z(a, b, c)\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)$$

$$F_x = f_x(\ )\cdot 0 + f_y(\ )\cdot 1 + f_z(\ )\cdot \frac{\partial g}{\partial y}.$$

$$F_y(a, b) = f_y(a, b, c) + f_z(a, b, c)\frac{\partial g}{\partial y}(a, b)$$

未定乗数

代入すると

$$F_x(a,b) = f_x(\mathrm{P}_0) - f_z(\mathrm{P}_0)\cdot\frac{g_x(\mathrm{P}_0)}{g_z(\mathrm{P}_0)} = 0$$

λ

$= g_x(a,b)$

$$F_y(a,b) = f_y(\mathrm{P}_0) - f_z(\mathrm{P}_0)\frac{g_y(\mathrm{P}_0)}{g_z(\mathrm{P}_0)} = 0$$

$= g_y(a,b)$

$= \lambda$

となります.

$$\lambda = -\frac{f_z(\mathrm{P}_0)}{g_z(\mathrm{P}_0)}$$

と定めると

$$f_x(\mathrm{P}_0) + \lambda g_x(\mathrm{P}_0) = 0,\ f_y(\mathrm{P}_0) + \lambda g_y(\mathrm{P}_0) = 0,\ f_z(\mathrm{P}_0) + \lambda g_z(\mathrm{P}_0) = 0$$

$g_z(P_0)$

$$\cancel{g_x z\mathrm{P}_0)} \neq 0,\ \ g(\mathrm{P}_0) = 0$$

のとき，P_0 で極大（または極小）ならば，ある $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在して

$$\begin{cases} f_x(\mathrm{P}_0) & + & \lambda g_x(\mathrm{P}_0) & = & 0 \cdots (1) \\ f_y(\mathrm{P}_0) & + & \lambda g_y(\mathrm{P}_0) & = & 0 \cdots (2) \\ f_z(\mathrm{P}_0) & + & \lambda g_z(\mathrm{P}_0) & = & 0 \cdots (3) \\ & & g(\mathrm{P}_0) & = & 0 \cdots (4) \end{cases}$$

$$\nabla(f)(P_0) + \lambda \nabla(g)(P_0) = \vec{0}$$

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$f(x, y, z) = x + 2y + 3z$$

$$\nabla(g) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \quad \nabla(f) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda \cdot 2x = 0 & (1) \\ 2 + \lambda \cdot 2y = 0 \\ 3 + \lambda \cdot 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

$\lambda = 0$ とすると

$(1) \rightarrow 1 = 0$ ※

$\lambda \neq 0$ としてよい.

$$x = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$y = -\frac{2}{2\lambda}$$

$$z = -\frac{3}{2\lambda}$$

(4)に代入

$$\frac{1}{4\lambda^2}(1 + 4 + 9) = 1 \rightarrow \frac{14}{4\lambda^2} = 1$$

$$\lambda^2 = \frac{4}{14}$$

$$\rightarrow \lambda = \pm \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \quad y = -\frac{2}{2\lambda}, \quad z = -\frac{3}{2\lambda}$$

$$\lambda = \pm\frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \frac{1}{\lambda} = \pm\frac{\sqrt{14}}{2}$$

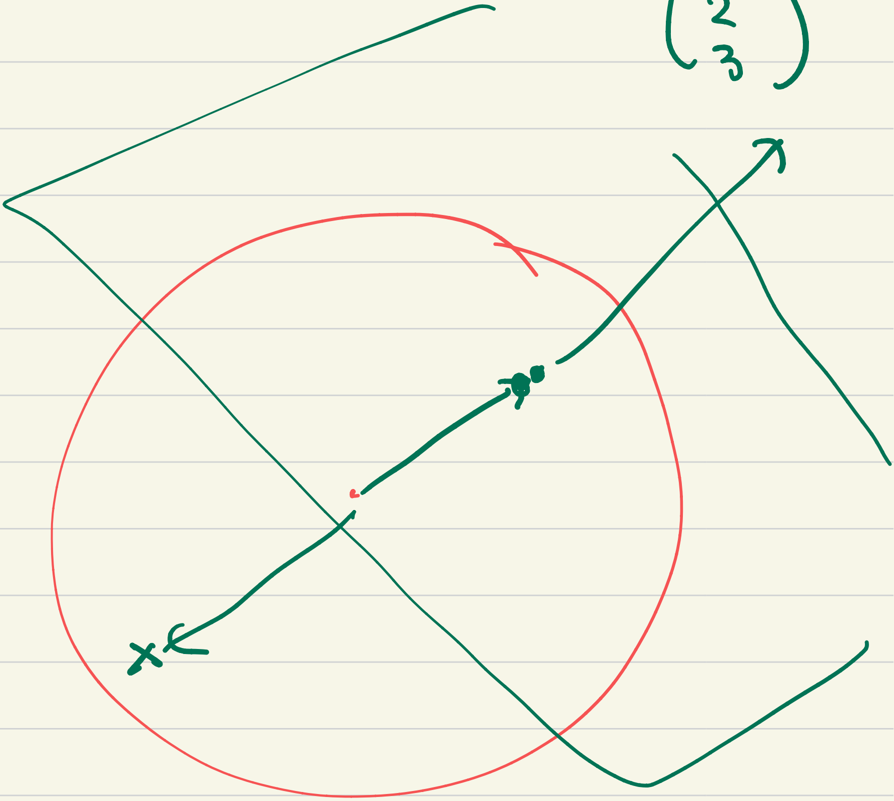
$$\boxed{\begin{aligned} x &= \mp\frac{\sqrt{14}}{4} \\ y &= \mp\frac{\sqrt{14}}{2}, \\ z &= \mp\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{14}}{2} = \mp\frac{3\sqrt{14}}{4} \end{aligned}}$$

1

2

3

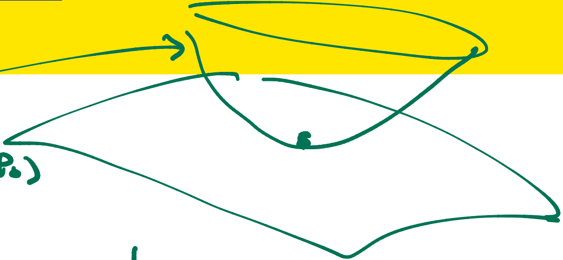
$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$



$$f(x, y, z) = C$$

$$x + 2y + 3z - C = 0$$

$f(x, y, z) = f(P_0)$



$g(x, y, z) = 0$

(1),(2),(3) は

$$\nabla(f)(\mathrm{P}_0) = -\lambda\nabla(g)(\mathrm{P}_0)$$

とみると，曲面 $g(x, y, z) = 0$ と曲面 $f(x, y, z) = f(\mathrm{P}_0)$ が P_0 で接していることを意味する．