Lagrange の未定乗数法— 3 変数 2 制約条件

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

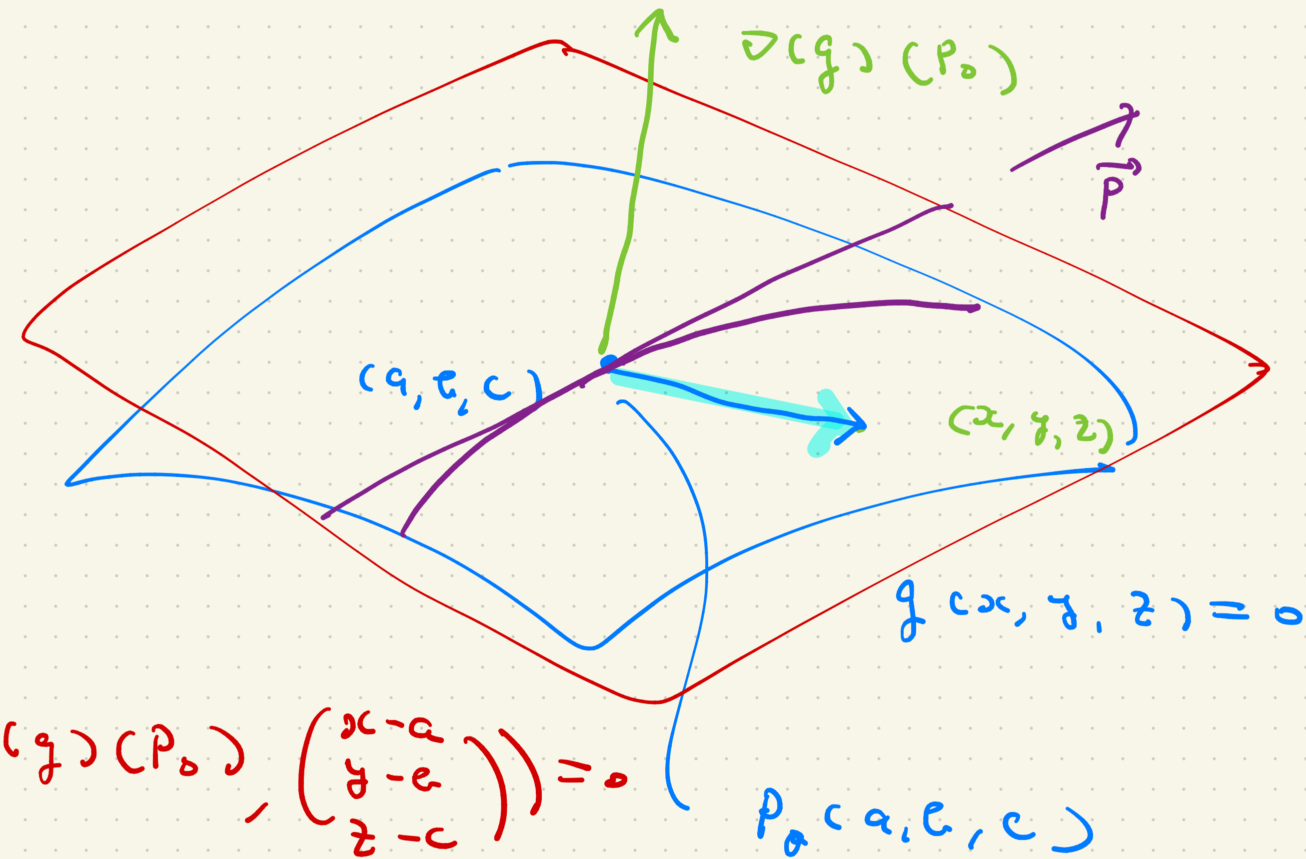
2008 年 7 月
2020 年 10 月,11 月　経済数学・経済数学入門

はじめに

- U：$\mathbf{R}^3$ の開集合
- g_1，g_2，f： $U \longrightarrow \mathbf{R}$ C^1 級の関数
- 制約条件 C： $g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$ の下で

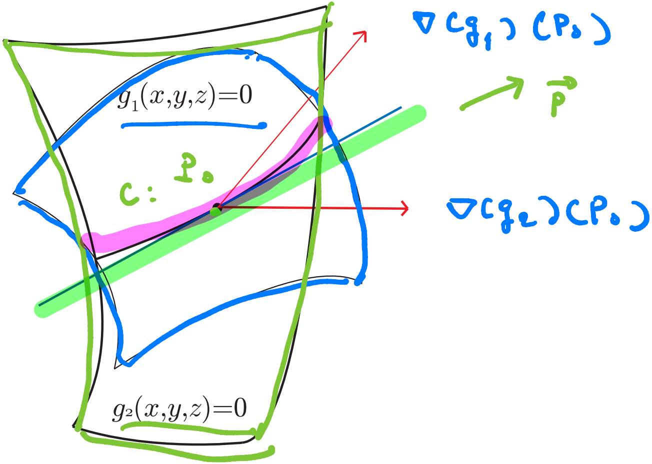
$$w = f(x, y, z)$$

を最適化する．



$$\left(\nabla(g)(P_0) , \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} \right) = 0$$

図 1



$\vec{p} \perp \nabla(g_1)(P_0)$

$\vec{p} \perp \nabla(g_2)(P_0)$

陰関数定理のための条件

$\nabla(g_1)(P_0) \nparallel \nabla(g_2)(P_0)$

- C 上の点 $\mathrm{P}_0(a, b, c)$ において $\begin{vmatrix} g_{1y}(\mathrm{P}_0) & g_{1z}(\mathrm{P}_0) \\ g_{2y}(\mathrm{P}_0) & g_{2z}(\mathrm{P}_0) \end{vmatrix} \neq 0$ を仮定する.
- このとき P_0 の近くで C は

$$(x, \varphi(x), \psi(x))$$

(陰関数定理)

〃 〃

y z.

とパラメータ表示される.

- $\nabla(g_1)(\mathrm{P}_0) \nparallel \nabla(g_2)(\mathrm{P}_0)$ であるので

$$\dim\left(\mathbf{R}\nabla(g_1)(\mathrm{P}_0) + \mathbf{R}\nabla(g_2)(\mathrm{P}_0)\right) = 2$$

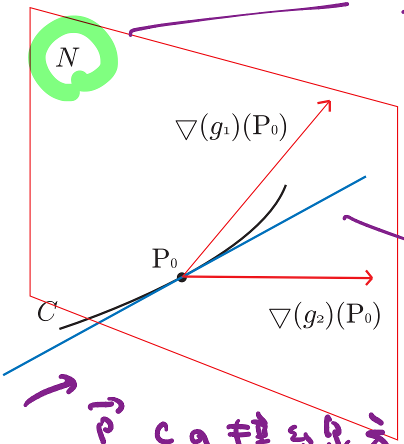
- $N = \mathbf{R}\nabla(g_1)(\mathrm{P}_0) + \mathbf{R}\nabla(g_2)(\mathrm{P}_0)$: C の法面

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow \quad \text{前題.}$$

$$\begin{vmatrix} p_i & q_i \\ p_j & q_j \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\exists i \ \exists j \quad i \neq j)$$

図 2



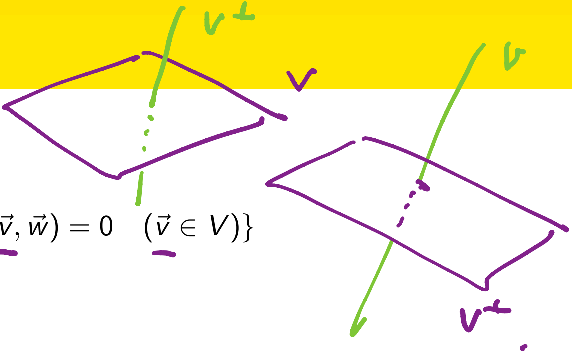
$= \mathbb{R}\,\nabla(g_1)(P_0) + \mathbb{R}\,\nabla(g_2)(P_0)$

$\underbrace{N \perp \vec{p}}$

$N^{\perp}$ 1次元

$\vec{p}$ Cの接線方向

直交補空間



- $\mathbf{R}^n$ の線型部分空間 V に対して

$$V^\perp := \{\vec{w} \in \mathbf{R}^n;\ (\vec{v}, \vec{w}) = 0 \quad (\vec{v} \in V)\}$$

を**直交補空間**とよびます.

-

$$\left(V^\perp\right)^\perp = V, \qquad V^\perp \oplus V = \mathbf{R}^n$$

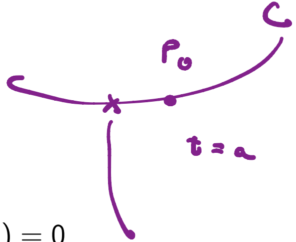
直和.

- V と W が $\mathbf{R}^n$ の部分空間で $V \subset W$ ならば

$$W^\perp \subset V^\perp$$

(問).

Chaine Rule



$$F(t) := f(t,\varphi(t),\psi(t))$$

とくと P_0 で極大（または極小）ならば

$$F'(a) = f_x(\mathrm{P}_0) + f_y(\mathrm{P}_0)\varphi'(a) + f_z(\mathrm{P}_0)\psi'(a) = 0$$

$(t, \varphi(t), \psi(t))$

これを

$$\left(\nabla(f)(\mathrm{P}_0), \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(a) \\ \psi'(a) \end{pmatrix}\right) = 0$$

chain Rule

と見ます.

$\nabla(f)(\mathrm{P}_0) \in (N^\perp)^\perp = N$

$$\frac{d}{dt} f(\overbrace{x(t), y(t), z(t)}^{P_t})$$

$(x(t), y(t), z(t))$

$$= f_x(P_t) \cdot x'(t)$$
$$+ f_y(P_t) \cdot y'(t)$$
$$+ f_z(P_t) \cdot z'(t)$$

$$= \left(\nabla(f)(P_t), \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} \right)$$

Chaine Rule(2)

$\vec{p} \in N^\perp \Leftrightarrow (\vec{p}, \nabla(g_1)(P_0)) = (\vec{p}, \nabla(g_2)(P_0)) = 0$

他方 $g_1(x, \varphi(x), \psi(x)) = g_2(x, \varphi(x), \psi(x)) \equiv 0$ を x で微分して

$(V^\perp)^\perp = V.$

$$g_{1x}(\mathrm{P}_0) + g_{1y}(\mathrm{P}_0)\varphi'(a) + g_{1z}(\mathrm{P}_0)\psi'(a) = 0$$

$$g_{2x}(\mathrm{P}_0) + g_{2y}(\mathrm{P}_0)\varphi'(a) + g_{2z}(\mathrm{P}_0)\psi'(a) = 0$$

$\neq 0$

これを

$$\left(\nabla(g_1)(\mathrm{P}_0), \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(a) \\ \psi'(a) \end{pmatrix}\right) = \left(\nabla(g_2)(\mathrm{P}_0), \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(a) \\ \psi'(a) \end{pmatrix}\right) = 0$$

$\in N^\perp.$

これから

による

$$N^\perp = \mathbf{R}\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(a) \\ \psi'(a) \end{pmatrix} \quad \text{従って} \quad N = \left(\mathbf{R}\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(a) \\ \psi'(a) \end{pmatrix}\right)^\perp$$

$(N^\perp)^\perp = (\mathbb{R}(\ ))^\perp$

$\shortparallel$ N

が分かります.

N による $\leftarrow$ $\nabla(g_1)(P_0) \nparallel \nabla(g_2)(P_0)$

結論

$$= \mathbb{R}\,\nabla(g_1)(P_0) + \mathbb{R}\,\nabla(g_2)(P_0)$$

$\nabla(f)(\mathrm{P}_0) \in \left(\mathbf{R}\begin{pmatrix}1\\ \varphi'(a)\\ \psi'(a)\end{pmatrix}\right)^{\perp} = N$ から

$$\boxed{\nabla(f)(\mathrm{P}_0) = -\lambda\nabla(g_1)(\mathrm{P}_0) - \mu\nabla(g_2)(\mathrm{P}_0)}$$

を満たす $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ が存在します.

定理

$g_1(P_0) = g_2(P_0) = 0$

←

$\nabla(g_1)(\mathrm{P}_0) \nparallel \nabla(g_1)(\mathrm{P}_0)$， $\cancel{g(\mathrm{P}_0) = 0}$ を仮定します．P_0 で極大（極小）ならば

2

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\nabla(f)(\mathrm{P}_0) + \lambda\nabla(g_1)(\mathrm{P}_0) + \mu\nabla(g_2)(\mathrm{P}_0) & = & \vec{0} \\
g_1(\mathrm{P}_0) & = & 0 \\
g_2(\mathrm{P}_0) & = & 0
\end{array}
\right.
$$

← ← 制約条件.

ほり ほかり のりっぷ