補足 (3変数と1制約条件)

$$F(x,y) = f(x,y,\varphi(x,y))$$

に対して

$$F_x(a,b) = F_y(a,b) = 0$$

から chain Rule

$$f_x(a,b,c)\cdot 1 + f_y(a,b,c)\cdot 0 + f_z(a,b,c)\,\varphi_x(a,b) = 0$$

$$f_x(a,b,c)\cdot 0 + f_y(a,b,c)\cdot 1 + f_z(a,b,c)\,\varphi_y(a,b) = 0$$

となります.

$$\left(\nabla(f)(P_0),\ \begin{pmatrix}1\\0\\\varphi_x(a,b)\end{pmatrix}\right) = 0 \qquad (1)$$

$$\left(\nabla(f)(P_0),\ \begin{pmatrix}0\\1\\\varphi_y(a,b)\end{pmatrix}\right) = 0 \qquad (2)$$

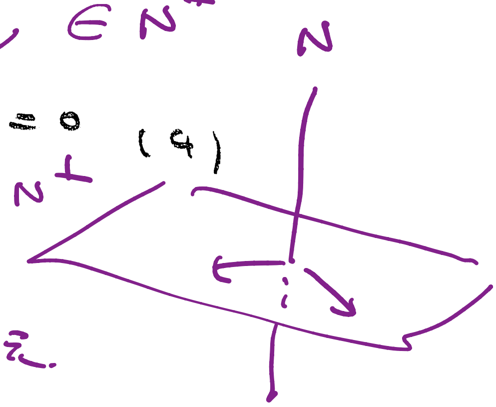
となります. 同様に $g(x,y,\varphi(x,y)) \equiv 0$

$$\to \left(\nabla(g)(P_0),\ \begin{pmatrix}1\\0\\\varphi_x(a,b)\end{pmatrix}\right) = 0 \qquad (3) \quad \in N^\perp$$

$$\to \left(\nabla(g)(P_0),\ \begin{pmatrix}0\\1\\\varphi_y(a,b)\end{pmatrix}\right) = 0 \qquad (4)$$

$\in N^\perp$

となります.



1次元 $\neq \vec{0}$

$$N = \mathbb{R}\,\nabla(g)(P_0) \quad (\subset \mathbb{R}^3)$$

2次元.

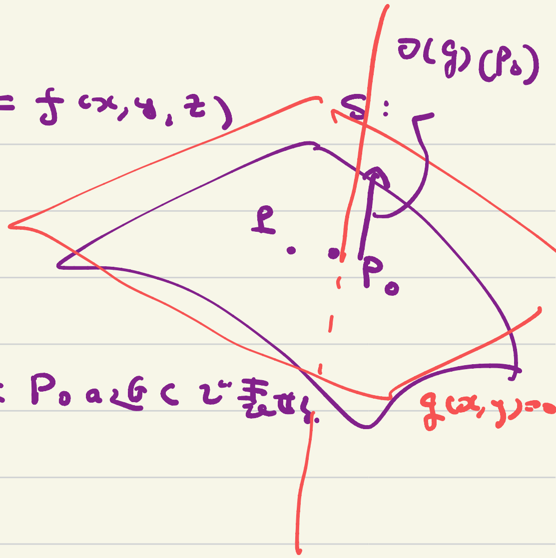
に対して $N^\perp$ の次元が 2 で

$$\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\varphi_x(a,b)\end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix}0\\1\\\varphi_y(a,b)\end{pmatrix}$$

から

$$N^\perp = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\\varphi_x(a,b)\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\\varphi_y(a,b)\end{pmatrix}$$



$S: g(x,y,z)=0$ の下で $w=f(x,y,z)$

$P_0(a,b,c)$ が $g(a,b,c)=0$

$\underline{g_z(P_0) \neq 0}$ 仮定

$\nabla(g)(P_0) \neq \vec{0}$

$z=\varphi(x,y)$ と S は P_0 の近くで表せる。

P_0 の近くで 極大(小)

$\Longleftrightarrow$ $F(x,y)=f(x,y,\varphi(x,y))$

が (a,b) で 極大(小)

$\Longrightarrow$ $F_x(a,b) = F_y(a,b) = 0$

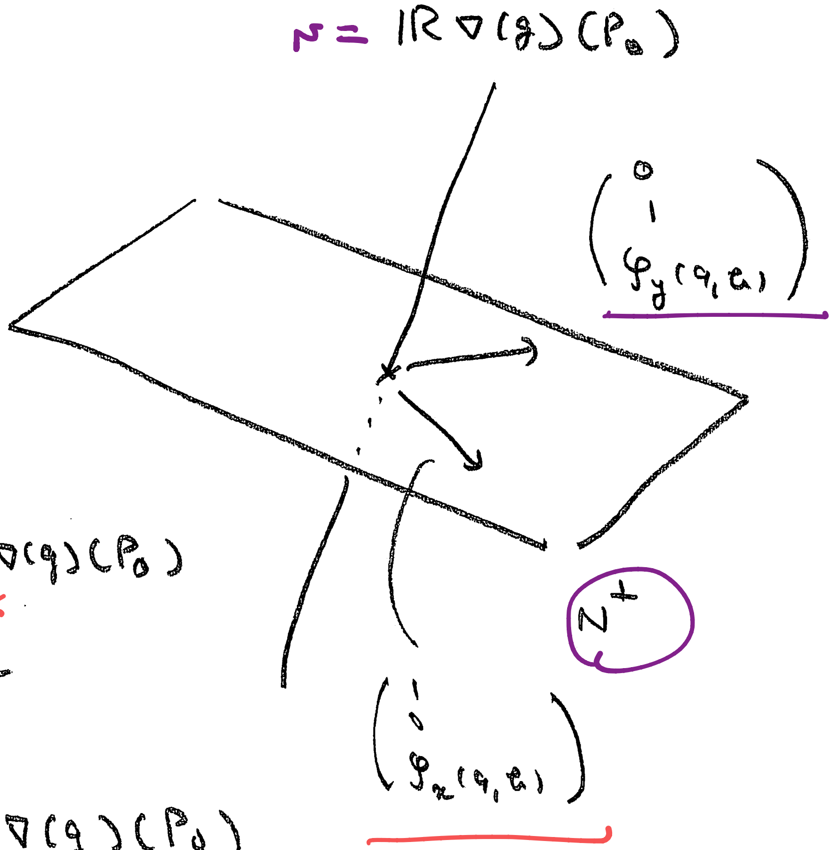
$\quad\parallel \qquad\qquad \parallel$

$\quad\vdots \qquad\qquad \vdots$

であることが分かります.

(1), (2)から

$$\nabla(f)(P_0) \in (N^{\perp})^{\perp} = N = \mathbb{R}\nabla(g)(P_0)$$



から $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\nabla(f)(P_0) = -\lambda \nabla(g)(P_0)$$

となります.

$V \subset \mathbb{R}^n$ 部分空間

$$(V^{\perp})^{\perp} = V$$