経済数学入門 L01 05/04　3 時間目 小テスト問題解答

I 関数 $f(x,y) := x^2 - 3xy + y^2 - 4x + 6y$ の停留点を求めましょう．

解答

$$
\begin{aligned}
f_x &= 2x - 3y + 0 - 4 + 0 \\
&= 2x - 3y - 4 = 0 \\
f_y &= 0 - 3x \cdot 1 + 2y + 0 + 6 \\
&= -3x + 2y + 6 = 0
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
\begin{cases}
2x - 3y &= 4 \\
-3x + 2y &= -6
\end{cases}
$$

をクラメールの公式で解くと

$$
x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-5} = 2
$$

$$
y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-5} = 0
$$

となりますから，f の停留点は $(x,y) = (2,0)$ です．

$(2,0)$.
これだけでは
極大でも
極小でもない

(a,b)で
極大 or 極小ならば $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$.

$(2,0)$で 極大でも極小でもない.

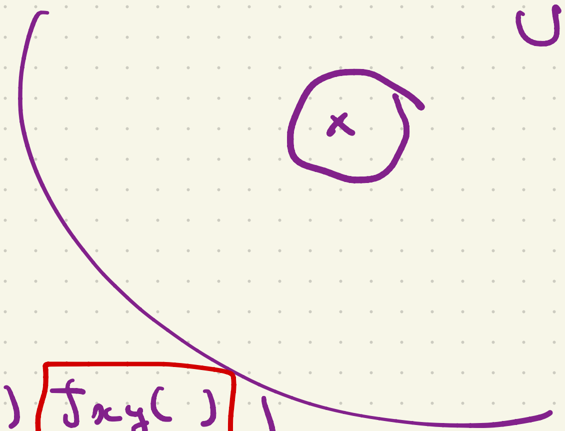
$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$　$(a,b) \in U$ で 最大(小) $\Longrightarrow$ 極大(小).
開

$f_x = 2x - 3y - 4$, $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = -3$

$f_y = -3x + 2y + 6$　$f_{yx} = -3$, $f_{yy} = 2$

$f : U \to \mathbb{R}$　$(a,b) \in U$

$\subset$ 開.



Ⅰ (1) $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$.

(2) $f_{xx}(a,b) > 0$ ($<$)　$\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & \boxed{f_{xy}(\ )} \\ \boxed{f_{yx}(a,b)} & f_{yy}(\ ) \end{vmatrix} > 0$　$f_{xy} = f_{yx}$

$\Longrightarrow$ (a,b) で極小 (大)

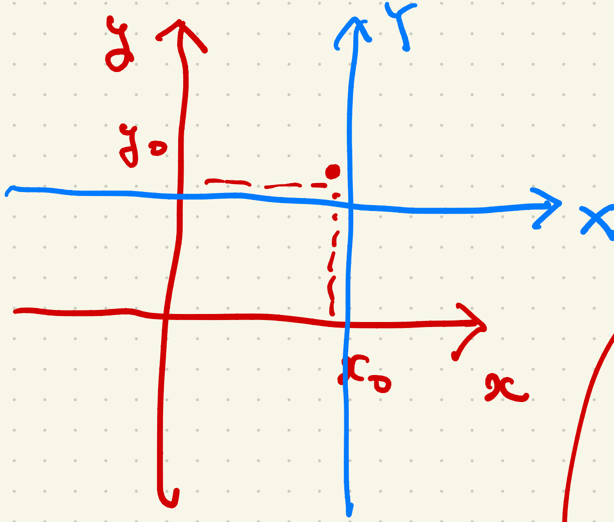
$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4-9 = -5 < 0$

Ⅱ $|\quad| < 0 \Longrightarrow$ 極大でも極小でもない.

$f_{xx} = (f_x)_x$, $f_{xy} = (f_x)_y$, $f_{yx} = (f_y)_x$

連続で ok.

Youngの定理.



$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

$$z = \cdots = \boxed{X^2 - 3XY + Y^2} + f$$

計算が必要

ある$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$に対して.

注意

II クラメールの公式を用いて $\begin{cases} x+y+z &= -1 \\ 2x-y-z &= 1 \end{cases}$ を満たす (x,y,z) に対して x,y を z で表しましょう.

解答

$$\begin{cases} x+y &= -z-1 \\ 2x-y &= z+1 \end{cases}$$

をクラメールの公式を用いて x,y について解くと

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} -z-1 & 1 \\ z+1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}\{-(-z-1)-(z+1)\} = -\frac{1}{3}\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -z-1 \\ 2 & z+1 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}\{(z+1)-2(-z-1)\} = -\frac{1}{3}(3z+3) \\ &= -z-1 \end{aligned}$$

L03

法線ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で $(0,0,-1)$ を通る平面.

$(0,-1,0)$

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ で $(0,0,-1)$

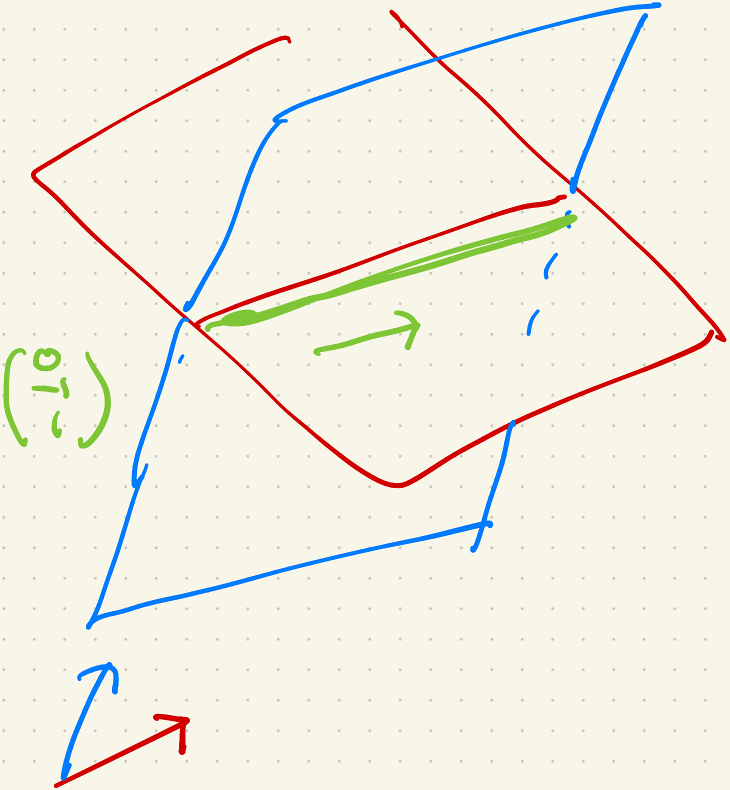
$(0,-1,0)$

(x,y,z) は両方の方程式を満たす.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z-1 \\ z \end{pmatrix} = z\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

③

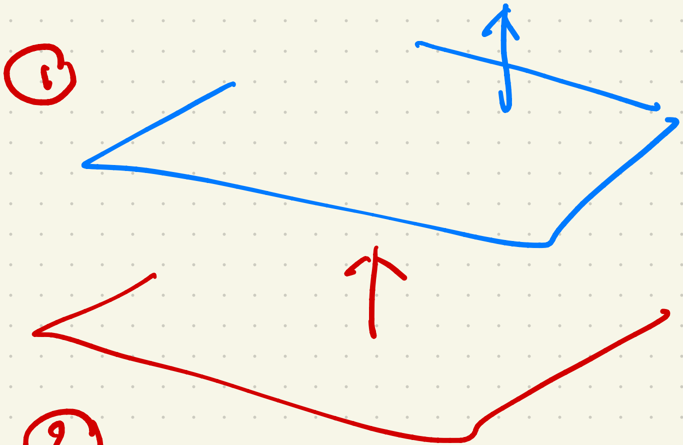
Lo3.



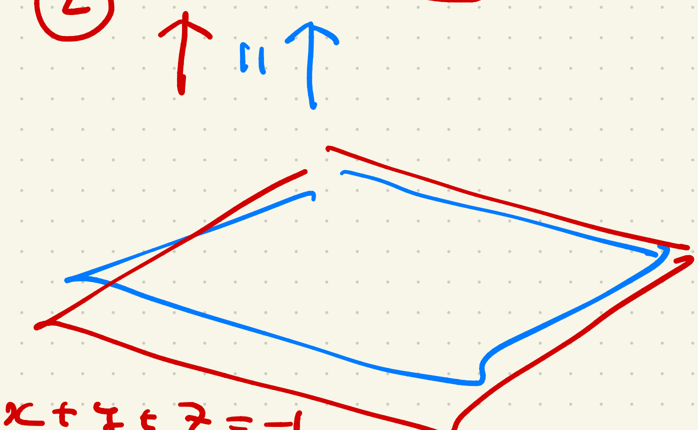
$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\nparallel$ の場合.

①



②



$$\begin{cases} x+y+z=-1 \\ 2x+2y+2z=-2 \end{cases}$$

Lo3

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \iff \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ OR }$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ OR } \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\parallel$$

$$\iff \left|\quad\right| = \left|\quad\right| = \left|\quad\right| = 0.$$

音声がうまくいかないので
別の会議で行ないます。
授業支援システムのお知らせ
見てください。
今から切ります。

III] 次の行列の積を計算しましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

解答 (1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} x \\ ay \\ z \end{pmatrix}$ **(3)** $\begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$ **(4)** $\begin{pmatrix} x+\lambda z \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **(5)** $\begin{pmatrix} \cos(\theta+\alpha) \\ \sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix}$ **(6)** $\begin{pmatrix} x+2y \\ 4x+3y \end{pmatrix}$

(1)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\shortparallel}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

I_3 3次の単位行列

$$I_3 \vec{v} = \vec{v} \quad (\vec{v} \in \mathbb{R}^3)$$

基本行列

(2)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

第1成分と第3成分の交換

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

1行と3行の交換.

① $i \neq j$　　i行とj行の交換.

② $\lambda \neq 0$　　i行をλ倍し

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

③ $i \neq j$　　i行のλ倍をj行に加える

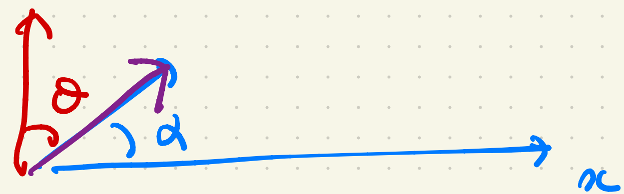
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\lambda z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

基本行列.　　3行のλ倍を1行に加える.

行基本変形

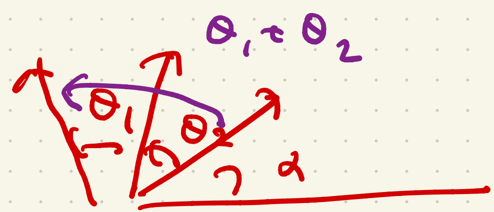
$$\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}}_{= R_\theta}\boxed{\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}} = \boxed{\begin{pmatrix}\cos(\theta+\alpha)\\ \sin(\theta+\alpha)\end{pmatrix}}$$

角度 θ 回転。



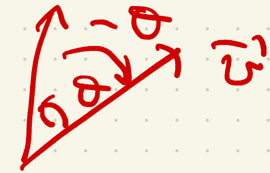
$$R_{\theta_1}R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2}$$

$$R_{\theta_1}R_{\theta_2}\vec{v} = R_{\theta_1+\theta_2}\vec{v}$$



$$\underbrace{R_{-\theta}}_{X} \cdot R_\theta = R_\theta \cdot \underbrace{R_{-\theta}}_{X} = R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$\longrightarrow$ R_θ は正則 $\quad (R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$.



A : 2×2

$$AY = YA = I_2$$
$$AX = XA = I_2$$
$\Longrightarrow$ $X = Y$.

$X = A^{-1}$.

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

を満たす $X \in M_2(\mathbb{R})$ が存在

$\Updownarrow$

A 正則.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ とします．以下の行列の積を計算しましょう．

(1) $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$　　(2) $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

解答 (1) $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$　　**(2)** $3\vec{a} + 4\vec{b}$