$\left(\frac{32}{5}, -\frac{28}{5}\right)$ こんな点では極大でも極小でもない.

経済数学入門 L01 05/04　4 時間目 小テスト問題解答

I 関数 $f(x,y) := x^2 + 3xy + y^2 + 4x - 8y$ の停留点を求めましょう．

解答

$$
\begin{aligned}
f_x &= 2x + 3y + 0 + 4 + 0 \\
&= 2x + 3y + 4 = 0 \\
f_y &= 0 + 3x \cdot 1 + 2y + 0 - 8 \\
&= 3x + 2y - 8 = 0
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
\begin{cases}
2x + 3y = -4 \\
3x + 2y = 8
\end{cases}
$$

をクラメールの公式で解くと

$$
x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-32}{-5} = \frac{32}{5}
$$

$$
y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{28}{-5} = -\frac{28}{5}
$$

となりますから，f の停留点は $(x,y) = \left(\frac{32}{5}, -\frac{28}{5}\right)$ です．

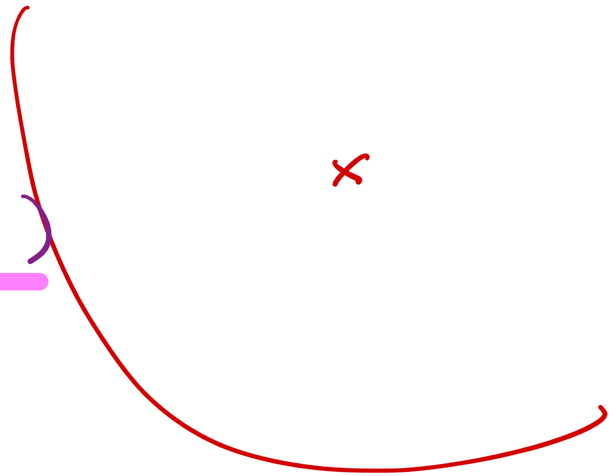
$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$　$(a,b) \in U$

$U \subset \mathbb{R}^2$ 開

$(a,b) \in U$ で最大(最小)

$\Downarrow$

すなわち (a,b) で極大 or 極小.



$\Longrightarrow f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$

L02 $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ i.e. = that is

Ⅰ (1) (a,b) は停留点 i.e. $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$

(2) $f_{xx}(a,b) > 0$, $\underbrace{\begin{vmatrix} f_{xx}(\ ) & \boxed{f_{xy}(\ )} \\ \boxed{f_{yx}(\ )} & f_{yy}(\ ) \end{vmatrix}}_{\text{Hesse行列式}} > 0$

< 0

$\Rightarrow$ fは (a,b) で極小 大

Ⅱ (1) 同じ

(2) $\begin{vmatrix} \ \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow$ 極大でも極小でもない.

$f_{xx} = (f_x)_x$, $f_{xy} = (f_x)_y$, $f_{yx} = (f_y)_x$, f_{yy} ---

$\overset{=}{\frown}$ ← 条件付き

Youngの定理.

$f_x = 2x + 3y + 4$ $\quad$ $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = 3$

$f_y = 3x + 2y - 8$ $\quad$ $f_{yx} = 3$, $f_{yy} = 2$

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 < 0$$

$\longrightarrow \left(\frac{32}{5}, -\frac{28}{5}\right)$ では極大でも

極小でもない

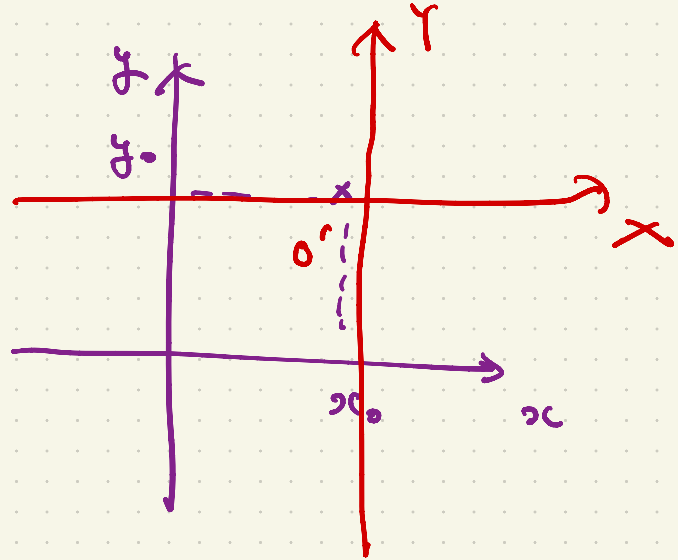
$z = x^2 + 3xy + y^2 + 4x - 8y$.

平行移動の座標変換.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + x_0 \\ Y + y_0 \end{pmatrix}$$

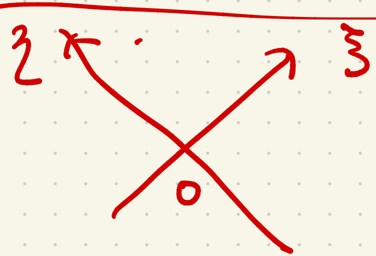
代入.



$\exists \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ によって

$$z = X^2 + 3XY + Y^2 + f$$

← 定数である.



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\xi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\eta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

zを $\xi\ \eta$ で表す. ②

II クラメールの公式を用いて $\begin{cases} x+2y-z &= 1 \\ 2x-y+z &= -1 \end{cases}$ を満たす (x,y,z) に対して x,y を z で表しましょう.

解答

$$\begin{cases} x+2y &= z+1 \\ 2x-y &= -z-1 \end{cases}$$

をクラメールの公式を用いて x,y について解くと

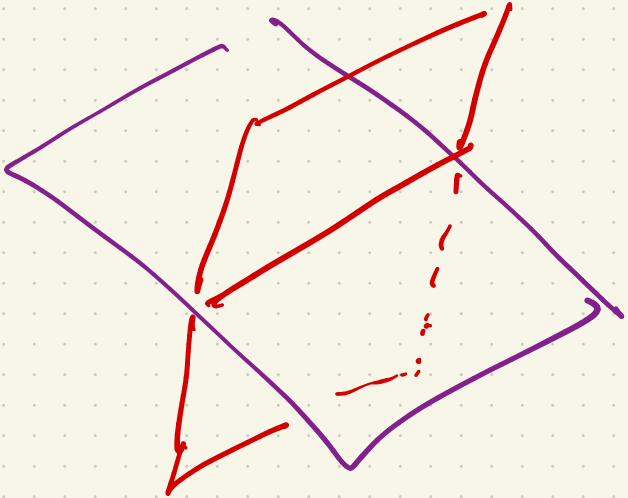
$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} z+1 & 2 \\ -z-1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{5}\{-(z+1)-2(-z-1)\} = -\frac{1}{5}\cdot(z+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & z+1 \\ 2 & -z-1 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{5}\{(-z-1)-2(z+1)\} = -\frac{1}{5}\cdot(-3z-3) \\ &= \frac{3}{5}(z+1) \end{aligned}$$

$(0,0,-1)$ を通って $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ が法線ベクトルの平面

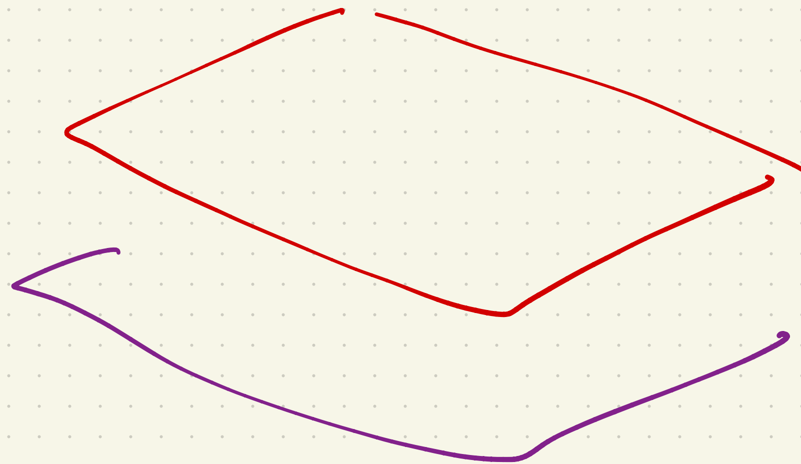
$(0,0,-1)$ ― $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ → の平面

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ $\qquad \nparallel$ であることが分かる.

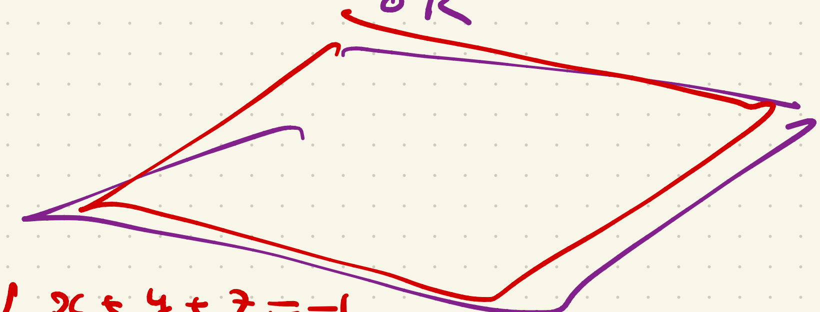


$$\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}$$

$\parallel$



OR



$$\begin{cases} x+y+z=-1 \\ 2x+2y+2z=-2. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \iff \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{OR} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{OR} \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\parallel \qquad \iff \quad \left| \quad \right| = \left| \quad \right| = \left| \quad \right| = 0$$

III] 次の行列の積を計算しましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

解答 (1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ az \end{pmatrix}$ **(3)** $\begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$ **(4)** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda x+z \end{pmatrix}$ **(5)** $\begin{pmatrix} \cos(\theta+\alpha) \\ \sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix}$ **(6)** $\begin{pmatrix} x+2y \\ 4x+3y \end{pmatrix}$

(1)
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\parallel}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

I_3 3次単位行列

$$I_3 \vec{v} = \vec{v} \quad (\vec{v} \in \mathbb{R}^3)$$

(3)

1成分と2成分の交換

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

1行と2行の交換．

Ⅰ $i \neq j$ i行とj行の交換 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

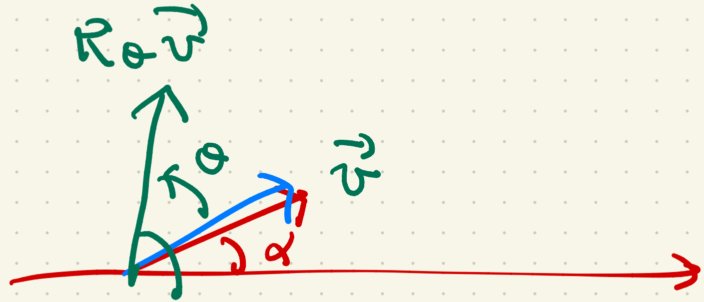
Ⅱ $a \neq 0$ i行をa倍. $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & a \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{ある成分をa倍}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ az \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & a & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

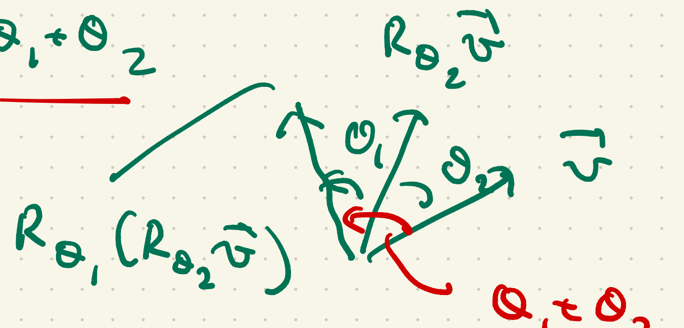
Ⅲ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \lambda x_1 + z_1 & \lambda x_2 + z_2 & \lambda x_3 + z_3 \end{pmatrix}$

行基本変形. 1行×λを3行に加える.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}}_{= R_\theta}\boxed{\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}} = \boxed{\begin{pmatrix}\cos(\theta+\alpha)\\ \sin(\theta+\alpha)\end{pmatrix}}$$



$$\underline{R_{\theta_1}\cdot R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2}}$$

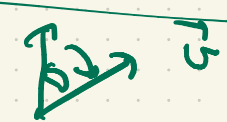


$$\underbrace{R_{-\theta}}_{X} \cdot R_\theta = R_\theta \cdot \underbrace{R_{-\theta}}_{X} = I_2 = R_0$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R_θ は正則　　$(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$



$A \in M_2(\mathbb{R})$

A: 正則 $\iff$ $AX = XA = I_2$ を満たす $X \in M_2(\mathbb{R})$ が存在.

$A^{-1} = X$ とする.

$$\left.\begin{aligned} AX &= XA = I_2 \\ AY &= YA = I_2 \end{aligned}\right) \leadsto X = Y.$$

一意.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ とします．以下の行列の積を計算しましょう．

(1) $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$　　(2) $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

解答 (1) $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$　　**(2)** $3\vec{a} + 4\vec{b}$