

第 1 講義 05 月 04 日 演習問題解答

I 以下の関数の停留点を求めましょう.

- (1) $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 8y$ (2) $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$
 (3) $z = x^2 + xy - y^2 - 4x - 2y$ (4) $z = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y$
 (5) $z = x^3 - xy - y^2$ (6) $z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + y^2)$
 (7) $z = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$ (8) $z = x^3 + y^3 + 6xy$

(1)

$$\begin{cases} z_x = 2x + y - 4 = 0 \\ z_y = x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式を使って解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{3} = 0, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{12}{3} = 4$$

となりますから、 $(x, y) = (0, 4)$ が z の停留点であることが分かります。

(2)

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 9y = 0 \cdots (I) \\ z_y = 3y^2 - 9x = 0 \cdots (II) \end{cases}$$

を解きます。(I) から $y = \frac{1}{3}x^2$ となるので (II) から得られる $y^2 = 3x$ に代入して

$$\frac{1}{9}x^4 = 3x \quad \text{すなわち} \quad x^4 = 27x$$

を得ます。従って

$$x = 0 \quad \text{または} \quad x = 3$$

が必要です。

(a) $x = 0$ のとき, (I) から $y = 0$ となりますが、逆に $(x, y) = (0, 0)$ は (I) かつ (II) を満たします。

(b) $x = 3$ のとき, (I) から $y = 3$ となりますが、逆に $(x, y) = (3, 3)$ は (I) かつ (II) を満たします。

以上で z の停留点は $(x, y) = (0, 0), (3, 3)$ であることが分かりました。

(3)

$$\begin{cases} z_x = 2x + y - 4 = 0 \\ z_y = x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式で解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-5} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-5} = 0$$

となりますから、 $(x, y) = (2, 0)$ が z の停留点であることが分かります。

(4)

$$\begin{cases} z_x = 2x + 4y - 6 = 0 \\ z_y = 4x + 4y - 8 = 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式で解くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-8} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-8} = 1$$

から停留点は $(x, y) = (1, 1)$ となります。

(5)

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - y = 0 & (i) \\ z_y = -x - 2y = 0 & (ii) \end{cases}$$

を解きます。(ii) から $x = -2y$ となりますが、これを (i) に代入して

$$12y^2 - y = 0$$

を得ますが、これから $y = 0$ または $y = \frac{1}{12}$ であることが分かります。これを $x = -2y$ に代入して

$$\begin{array}{ll} y = 0 & \text{のとき} \quad x = 0 \\ y = \frac{1}{12} & \text{のとき} \quad x = -\frac{1}{6} \end{array}$$

となりますから、停留点は

$$(x, y) = (0, 0), \quad \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$$

であることが分かります。

(6) まず関数

$$z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + y^2)$$

の停留点を求めましょう。まず z の偏導関数を計算すると

$$\begin{aligned} z_x &= e^{-x^2-y^2}(-2x)(2x^2+y^2) + e^{-x^2-y^2}(4x) \\ &= 2xe^{-x^2-y^2}(-2x^2-y^2+2) \\ z_y &= e^{-x^2-y^2}(-2y)(2x^2+y^2) + e^{-x^2-y^2}(2y) \\ &= 2ye^{-x^2-y^2}(-2x^2-y^2+1) \end{aligned}$$

となります。 $e^{-x^2-y^2} > 0$ ですから

$$\begin{aligned} z_x = z_y = 0 \\ \Leftrightarrow x(2x^2 + y^2 - 2) = 0 \\ \quad \text{and } y(2x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow (x = 0 \text{ or } 2x^2 + y^2 = 2) \\ \quad \text{and } (y = 0 \text{ or } 2x^2 + y^2 = 1) \\ \Leftrightarrow (x = y = 0) \\ \quad \text{or } (x = 0 \text{ and } 2x^2 + y^2 = 1) \\ \quad \text{or } (y = 0 \text{ and } 2x^2 + y^2 = 2) \\ \quad \text{or } (2x^2 + y^2 = 2 \text{ and } 2x^2 + y^2 = 1) \\ \Leftrightarrow (x = y = 0) \text{ or } (x = 0 \text{ and } y^2 = 1) \\ \quad \text{or } (y = 0 \text{ and } x^2 = 1) \\ \quad \text{or } (2x^2 + y^2 = 2 \text{ and } 2x^2 + y^2 = 1) \\ \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0) \end{aligned}$$

が成立します。従って z の停留点は $(x, y) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0)$ です。

(7) $f(x, y)$ の偏導関数は

$$\begin{aligned} f_x &= 2(x^2 + y^2) \cdot 2x - 4x = 4x(x^2 + y^2 - 1) \\ f_y &= 2(x^2 + y^2) \cdot 2y - 4y = 4y(x^2 + y^2 - 1) \end{aligned}$$

と計算されます。このことから

$$\begin{aligned} f_x = 0 &\Leftrightarrow (x = 0) \text{ OR } (x^2 + y^2 = 1) \\ f_y = 0 &\Leftrightarrow y = 0 \end{aligned}$$

が従いますので

$$\begin{aligned} f_x = f_y = 0 &\Leftrightarrow (x = y = 0) \\ &\quad \text{OR } (x^2 + y^2 = 1, \text{ AND } y = 0) \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0), (\pm 1, 0) \end{aligned}$$

が分かります。以上で f の停留点は $(0, 0), (1, 0), (-1, 0)$ の3点であることが示されました。

(8) (コアテキストの 282 ページの例 8.18)

z の偏導関数は

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6y = 0 \cdots (1) \\ z_y = 3y^2 + 6x = 0 \cdots (2) \end{cases}$$

と計算されます。(2) から $x = -\frac{1}{2}y^2$ を得ますが、これを (1) から得られる $y = -\frac{1}{2}x^2$ に代入すると

$$y = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}y^2 \right)^2 = -\frac{1}{8}y^4$$

が導かれます。従って

$$y(y^3 + 8) = 0$$

から $y = 0$ または $y = -2$ であることが必要条件であることが分かります。このとき

(i) $y = 0$ のとき (2) に代入して $x = 0$

(ii) $y = -2$ のとき (2) から $x = -2$ を得る。

を得ます。以上で停留点は

$$(x, y) = (0, 0) \text{ または } (-2, -2)$$

であることが示されました。

II 次の行列の積を計算しましょう.

$$(1) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(6) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (7) \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(9) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解答

(1)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda y \\ y \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \lambda x + y \end{pmatrix}$$

(5)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

(6)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ y \end{pmatrix}$$

(7)

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda + \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(8)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(9)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \lambda a_1 + b_1 \\ a_2 & \lambda a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a} \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{a} \lambda \vec{a} + \vec{b})$$

(10)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & b_1 \\ \lambda a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a} \vec{b}) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\lambda \vec{a} \vec{b})$$

(11)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a} \vec{b}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\vec{b} \vec{a})$$

III $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ とします. 以下を計算しましょう。

(1) $(\vec{a} \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, (2) $(\vec{a} \vec{b}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, (3) $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, (4) $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, (5) $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(6) $(\vec{a} \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (7) $(\vec{a} \vec{b}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (8) $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(9) $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (10) $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(11) $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (12) $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$,

解答

(1)

$$(\vec{a} \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} = \vec{a}$$

(2)

$$(\vec{a} \vec{b}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} = \vec{b}$$

(3)

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{a}$$

(4)

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{b}$$

(5)

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c} = \vec{c}$$

(6)

$$(\vec{a} \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} \quad 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \vec{b})$$

(7)

$$(\vec{a} \vec{b}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} \quad 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \vec{a})$$