第2講

01 極大・極小の必要条件

02 接平面，限界生産物，接線.

03 2次正方行列の積

~~04 2次行列式の性質.~~

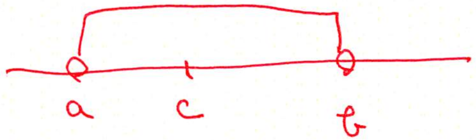
Part 01.

極大（小）の必要条件（補足）

Nobuyuki TOSE

April 22, 2019

極大・極小の十分条件 (1 変数の場合)



定理（復習）

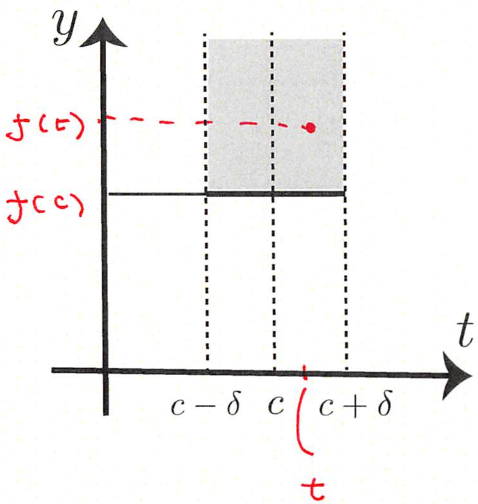
各点で微分可能な $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ が $c \in]a, b[$ で極大（または極小）ならば

$$f'(c) = 0$$

$f(c)$ が極小値である

$\Leftrightarrow \exists \delta > 0$が存在して

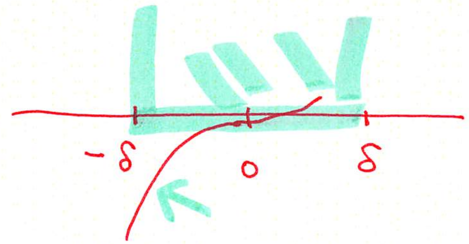
$$c - \delta < t < c + \delta \quad \Rightarrow \quad f(t) \geq f(c)$$



定理の逆は成立するか？

定理の逆は成立しません．

反例 $f(t) = t^3$ とすると $f'(t) = 3t^2$ なので $f'(0) = 0$ から $t = 0$ は f の停留点である．任意の $\delta > 0$ に対して



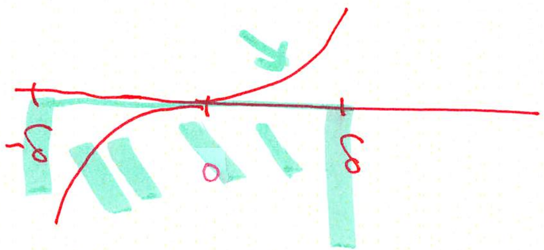
$$-\delta < t < 0 \Rightarrow f(t) < 0 = f(0)$$

であるので

$$-\delta < t < \delta \ \Rightarrow f(t) \geq f(0) = 0$$

を満たす正数 $\delta > 0$ は存在しません．従って f は $t = 0$ で極小ではありません．

他方，任意の $\delta > 0$ に対して



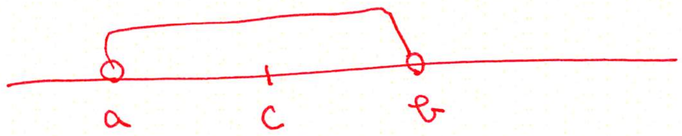
$$0 < t < \delta \Rightarrow f(0) = 0 < f(t)$$

であるので

$$-\delta < t < \delta \ \Rightarrow f(t) \leq f(0) = 0$$

を満たす正数 $\delta > 0$ は存在しません．従って f は $t = 0$ で極大ではありません．

極大・極小の十分条件



f は $]a,b[$ で2階微分可能.

定理

$f:]a,b[\to \mathbf{R}$ が $]a,b[$ の各点で微分可能，f' も $]a,b[$ の各点で微分可能とします．さらに f'' が $]a,b[$ の各点で連続とします．このとき $t=c\in]a,b[$ において

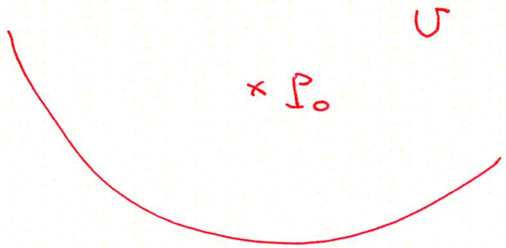
$$f'(c)=0,\quad f''(c)>0\quad (\text{resp. } f''(c)<0)$$

ならば f は $t=c$ で極小（resp. 極大）となります．

f は $]a,b[$ で C^2級

この定理も最終的には証明します．

極大点・極小点であることの必要条件（復習）



$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数

$$f: U \to \mathbf{R}$$

が U の各点 $\mathrm{P} \in U$ で x, y について偏微分できると仮定します.

Theorem

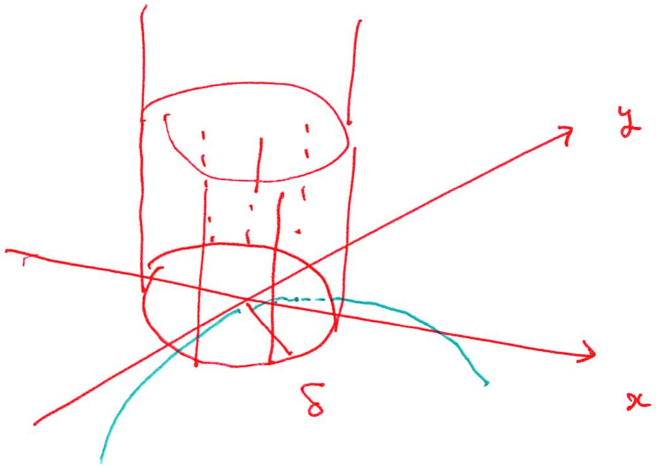
f が $\mathrm{P}_0(a,b) \in U$ で極小（極大）ならば

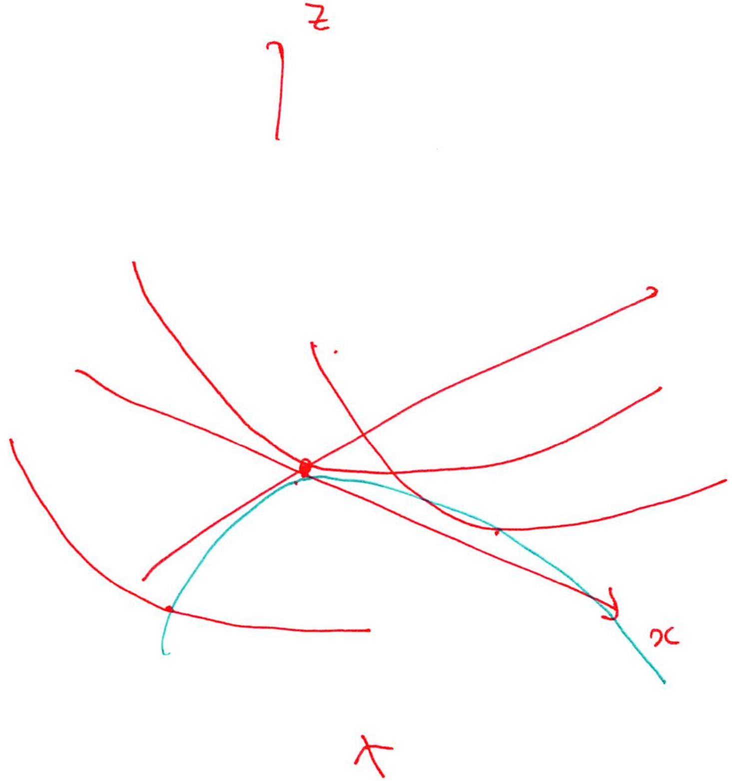
$$\boxed{f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0} \tag{1}$$

が成立します.

この状況で (1) を満たす点 $\mathrm{P}_0(a,b)$ を f の停留点と呼びます.

$\forall \delta > 0$

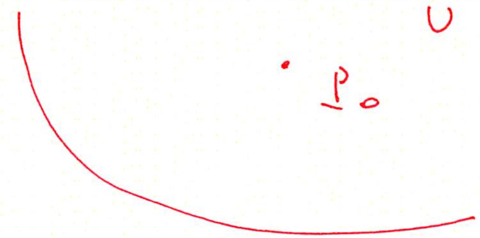




鞍点 saddle point.

le col.

極大・極小の十分条件



定理

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の C^2 級関数 $f:\ U \to \mathbf{R}$ に対して $\mathrm{P}_0(a,b) \in U$ が停留点であるとします．

Hesse 行列式．
ヘッシアン

$$f_x(\mathrm{P}_0) = f_y(\mathrm{P}_0) = 0$$

(1) $\boxed{\begin{vmatrix} f_{xx}(\mathrm{P}_0) & f_{xy}(\mathrm{P}_0) \\ f_{yx}(\mathrm{P}_0) & f_{yy}(\mathrm{P}_0) \end{vmatrix}} > 0,\ f_{xx}(\mathrm{P}_0) > 0$ (resp. $f_{xx}(\mathrm{P}_0) < 0$)
であるならば P_0 で f は極小（resp. 極大）となります．

(2) $\begin{vmatrix} f_{xx}(\mathrm{P}_0) & f_{xy}(\mathrm{P}_0) \\ f_{yx}(\mathrm{P}_0) & f_{yy}(\mathrm{P}_0) \end{vmatrix} < 0$ ならば f は f は P_0 で f は極小でも極大でもありません．

今後当分の間この定理の証明をしながらいろんなことを学びます．

例–停留点であることは極大・極小の十分条件ではない

$f_{xx} = 2,\ f_{xy} = 0$

$f_{yx} = 0,\ f_{yy} = -2$

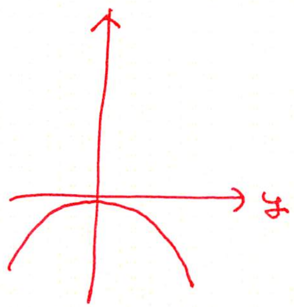
$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$

を考えましょう．

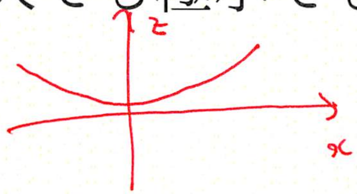
$$f_x(x, y) = 2x = 0, \quad f_y(x, y) = -2y = 0$$

から f の停留点は $(x, y) = (0, 0)$ です．



$$f(x, 0) = x^2, \quad f(0, y) = -y^2$$

から $(0, 0)$ で f は極大でも極小でもないことが分かります．



Part 02 接平面・限界生産物・接線

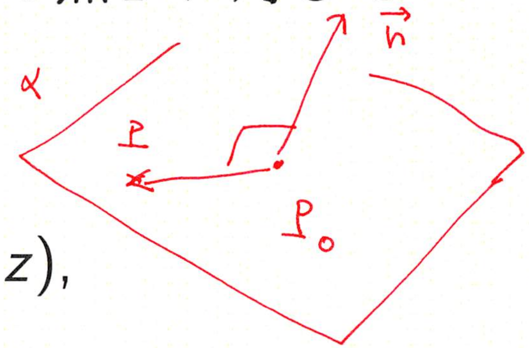
接平面（Tangent Plane）

Nobuyuki TOSE

October 04, 2017

平面の方程式

点 P_0 を通り $\vec{n}(\neq \vec{0})$ に垂直な平面 α を考えます．α の任意の点 P に対して



$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}} = 0$$

が成立します．P_0 の座標が (x_0, y_0, z_0)，P の座標が (x, y, z)，

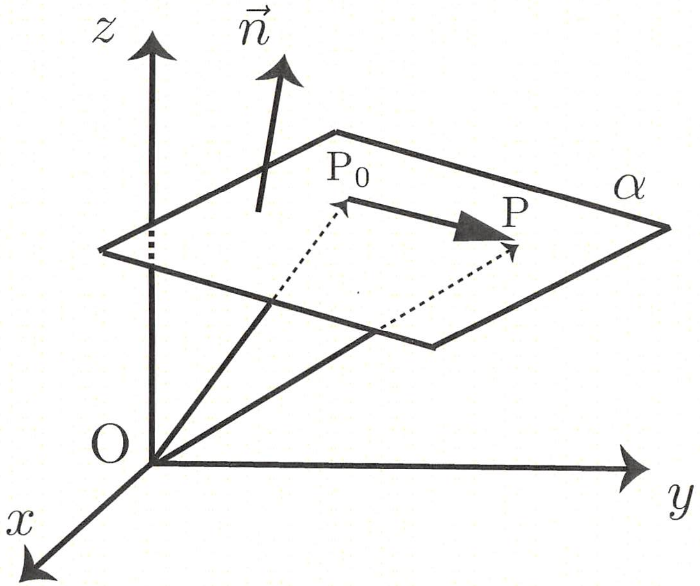
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad \text{であるとき} \quad \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

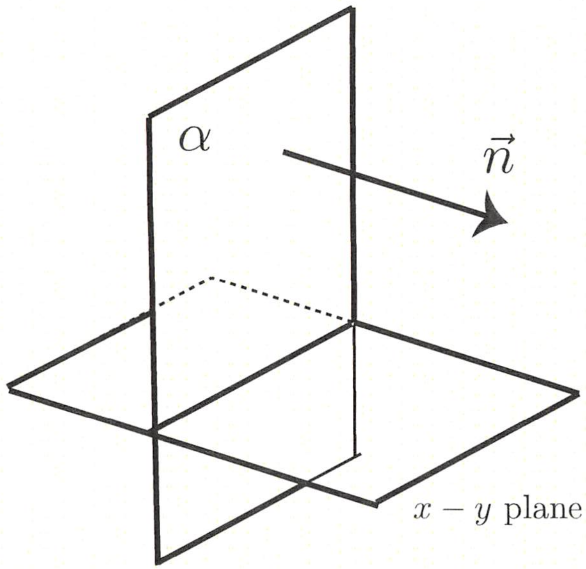
であるので，上の条件は座標を用いると

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) + r(z - z_0) = 0$$

The Equation of a plane

$\vec{n}$のことを平面の法線ベクトル (normal vector) と呼びます.

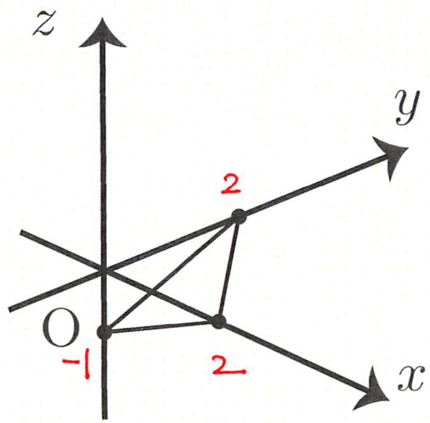




具体例

$$x + y - 2z = 2$$

について考えます．通る点を具体的に求めます．

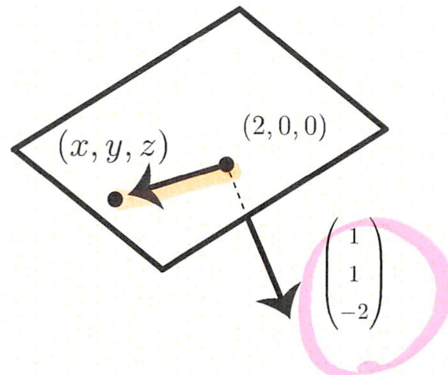


x 切片	(2,0,0)	y = z = 0
y 切片	(0,2,0)	x = z = 0
z 切片	(0,0,-1)	x = y = 0

segment.

(2, 0, 0) を通ることから

$$\begin{array}{rccccccc} & x & + & y & - & 2z & = & 2 \\ -) & 2 & + & 0 & - & 2\cdot 0 & = & 2 \\ \hline & (x-2) & + & y & - & 2z & = 0 & \end{array}$$



すなわち

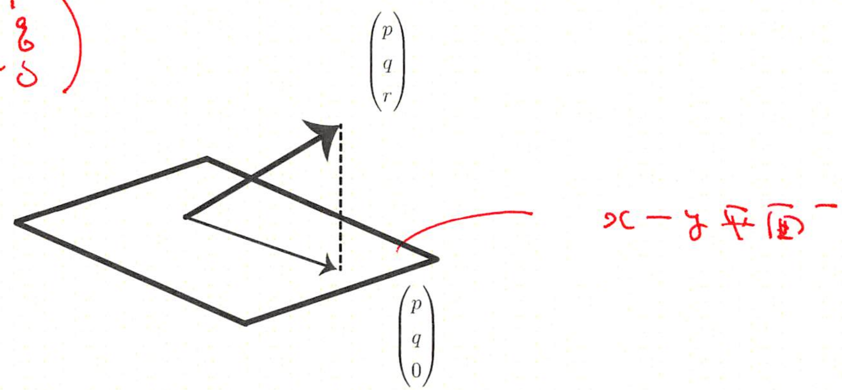
$$\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-2\\y\\z\end{pmatrix} = 0$$

In case $r=0$

$r=0$ の場合 $\vec{n}$ は $x-y$ 平面に平行になり，平面 α は $x-y$ 平面に垂直になります．

$$r=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \parallel x-y\text{平面}, \quad \alpha \perp x-y\text{平面}$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ 0 \end{pmatrix}$



偏微分（復習）

2 変数関数

$$z = f(x, y)$$

に対して x の関数

$$F(x) := f(x, b)$$

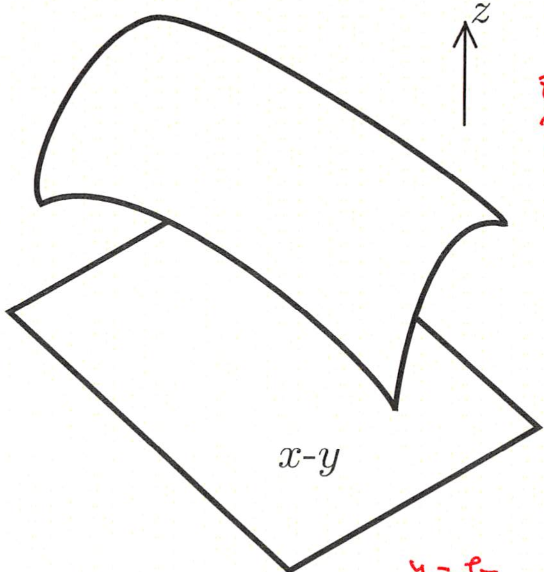
を考えて，(a, b) における x に関する偏微分係数

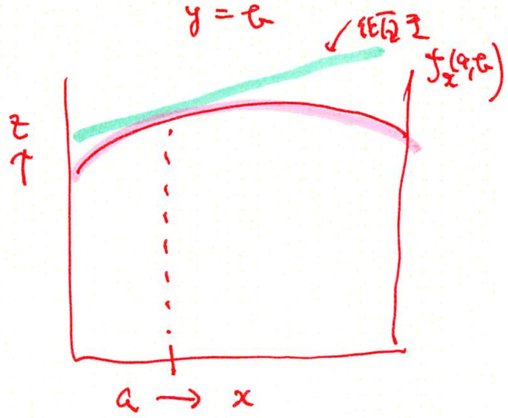
$$f_x(a, b) = F'(a)$$

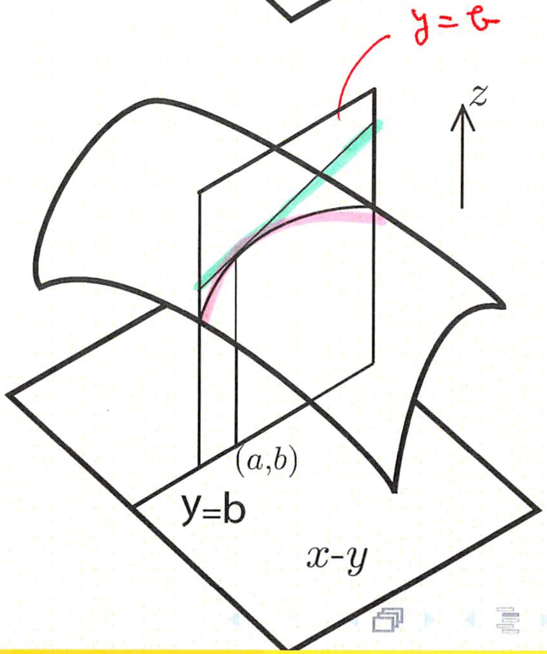
を定義します．

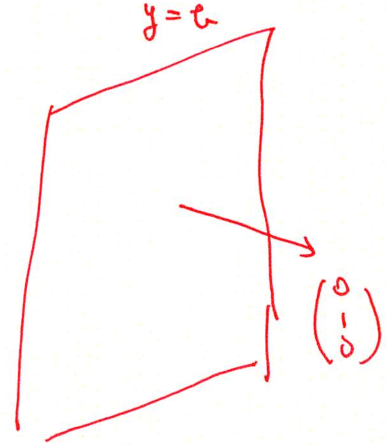
切断面

cross-section







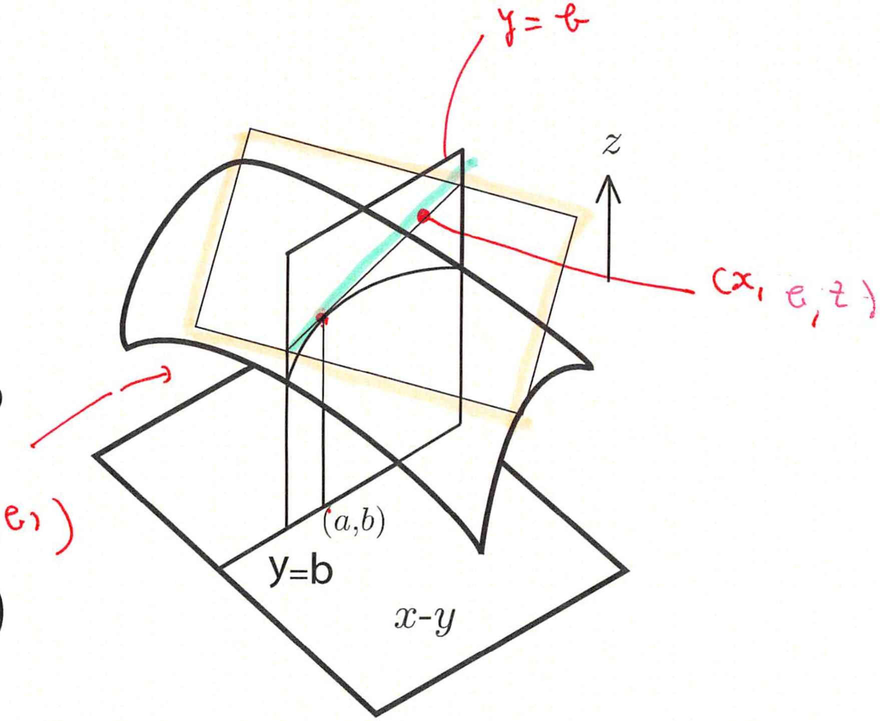


Tangent Plane

関数 $f(x, y)$ のグラフ

$$z = f(x, y)$$

の $(a, b, f(a, b))$ における接平面を求めます．そのために



$(a, b, f(a, b))$

$$z = A(x - a) + B(y - b) + f(a, b) \quad (1)$$

の係数 A, B を求めます．

$$p(x-a) + q(y-b) + r(z - \overset{f(a,b)}{c}) = 0$$

$r \neq 0$

$$z = -\frac{p}{r}(x-a) - \frac{q}{r}(y-b) + f(a,b)$$

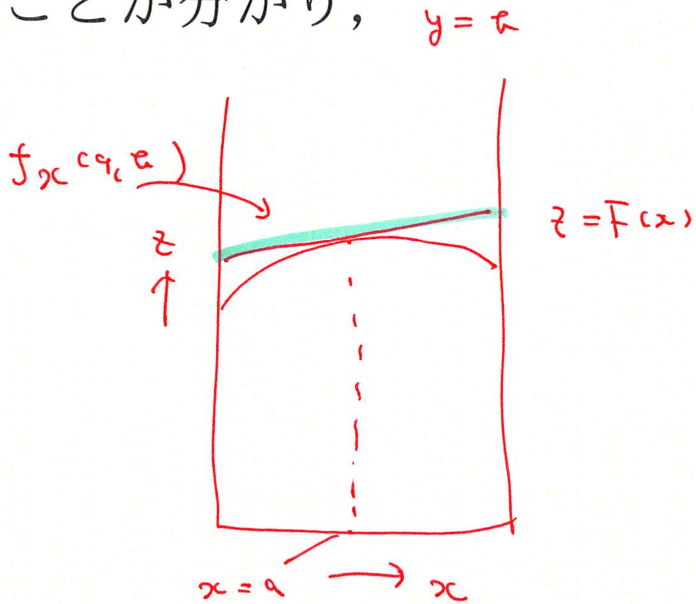
Tangent Plane (2)

接平面と切断面 $y = b$ との交わりは，切断面の上では $z = F(x)$ の $x = a$ における接線となります．さらに (1) に $y = b$ を代入して切断面 $y = b$ 上に制限すると

(x, b, z)

$$z = A(x - a) + f(a, b)$$

となります．これからこの直線の傾きが A であることが分かり，



$$A = F'(a) = f_x(a, b)$$

であることが分かります．同様に

$$B = f_y(a, b)$$

となりますから，結局，接平面は方程式

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

で表されます．

例

$(t^{\alpha})' = \alpha t^{\alpha-1}$

関数

$$z = f(x,y) = 4x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$$

を $(x,y) = (a,b) = (10^4, 625)$ の周りで考えます．関数 f の偏導関数は

$= 4\cdot\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}$ 　 $= 4\cdot\frac{1}{4}x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}$

$$f_x(x,y) = 3x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}, \quad f_y(x,y) = x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\; 25 \\ \hline 125 \\ 50 \\ \hline 625 \end{array}$$

となりますから，偏微分係数は

$= 3\cdot\frac{1}{10}\cdot 5$ 　 $10^3\cdot\frac{1}{125}$ ||

$$f_x(10^4, 625) = 1.5, \quad f_y(10^4, 625) = 8$$

と計算されます．従って $(x,y) = (10^4, 625)$ における接平面は

$f(10^4, 625)$

$$z = 1.5(x - 10^4) + 8(y - 625) + 2.0 \times 10^4$$

$= 4\cdot 10^3 \times 5$

$= 2.0 \times 10^4$

であることが分かります．

限界生産物（Marginal Products）

資本 (Capital) の投入量が K, 労働 (labor) の投入量が L の生産関数

$$Q = f(K, L)$$

を考えます．このとき $(K, L) = (K_0, L_0)$ の周りで Q は接平面を用いて

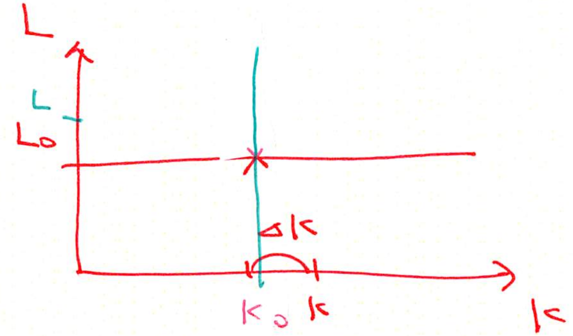
$$\begin{aligned} Q &\approx f_K(K_0, L_0)(K - K_0) + f_L(K_0, L_0)(L - L_0) + f(K_0, L_0) \\ &= f_K(K_0, L_0)\Delta K + f_L(K_0, L_0)\Delta L + f(K_0, L_0) \end{aligned}$$

1次近似

接平面で代用

従って

$$\begin{aligned} \Delta Q = Q - Q_0 &= f(K, L) - f(K_0, L_0) \\ &\approx f_K(K_0, L_0)\Delta K + f_L(K_0, L_0)\Delta L \end{aligned}$$



と近似します（これを **1** 次近似と呼びます）.

限界生産物（Marginal Products）

$\Delta L = 0$ すなわち $L = L_0$ のとき

$$\Delta Q = f(K_0 + \Delta K, L_0) - f(K_0, L_0) \approx f_K(K_0, L_0) \cdot \Delta K$$

が成立します．このとき

$$MPK = F_K(K_0, L_0)$$

を $(K, L) = (K_0, L_0)$ における資本の限界生産物（**Marginal Product of Capital**）（MPK）と呼びます．

$\Delta K = 0$ のとき

$\Delta Q = \underbrace{f_L(K_0, L_0)}_{\text{労働の限界生産物}} \Delta L$

限界生産物（Marginal Products）

具体的に Cobb-Douglass 型の生産関数

$$Q = F(K, L) = 4K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}$$

を $(K, L) = (K_0, L_0) = (10^4, 625)$ の周りで考えます.

$$F_K(K, L) = 4 \cdot \frac{3}{4}K^{-\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}} = 3K^{-\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}}$$
$$F_L(K, L) = 4 \cdot \frac{1}{4}K^{-\frac{3}{4}}L^{\frac{3}{4}} = K^{-\frac{3}{4}}L^{\frac{3}{4}}$$

と偏導関数を計算します.

$$(t^{\alpha})' = \alpha t^{\alpha - 1}$$

限界生産物（Marginal Products）

このとき (K_0, L_0) における資本の限界生産物 (MPK) と労働の限界生産物（**Marginal Product of Labor**） (MPL) は

$(K_0, L_0) = (10^4, \underset{\overset{\shortparallel}{5^4}}{625})$

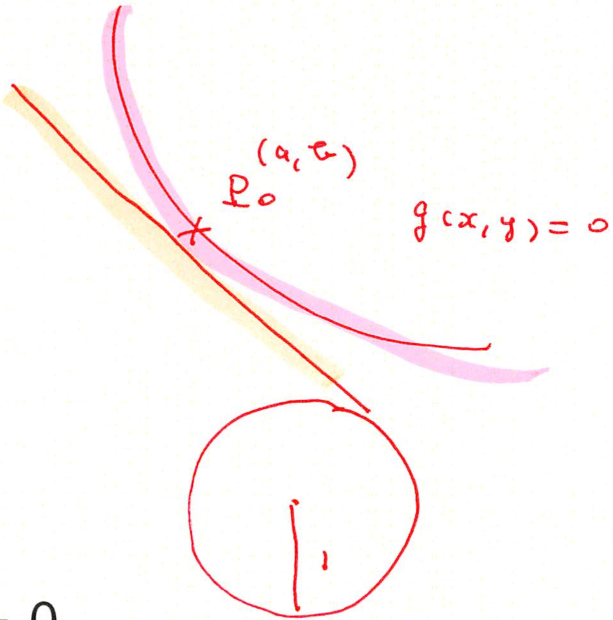
$$MPK = F_K(K_0, L_0) = \frac{3 \cdot 5}{10} = 1.5$$
$$MPL = F_L(K_0, L_0) = \frac{10^3}{5^3} = 8$$

となります．さらに $Q = F(10^4 + 100, 625) = 20,149.813\ldots$ の値の近似を

$$F(10^4 + 100, 625) \approx F(10^4, 625) + F_K(10^4, 625) \cdot 100$$
$$= 20,000 + 1.5 \times 100 = 20,150$$

と計算します．

曲線の接線



曲線 C が 2 変数関数 g を用いて

$$g(x, y) = 0$$

と与えられているとします．例えば単位円は

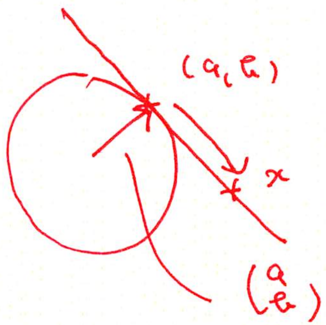
$$g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$$

と表されます．C 上の点 $\mathrm{P}_0(a, b)$ が与えられているときに，C の $\mathrm{P}_0(a, b)$ における接線を求めます．

$g_x = 2x,\ g_y = 2y$

$2a(x-a) + 2b(y-b) = 0$

$ax + by = 1$



$a^2 + b^2 = 1$

$\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = 0$

$a(x-a) + b(y-b) = 0$

$ax + by = a^2 + b^2 = 1$

曲線の接線–3 次元的には

曲面

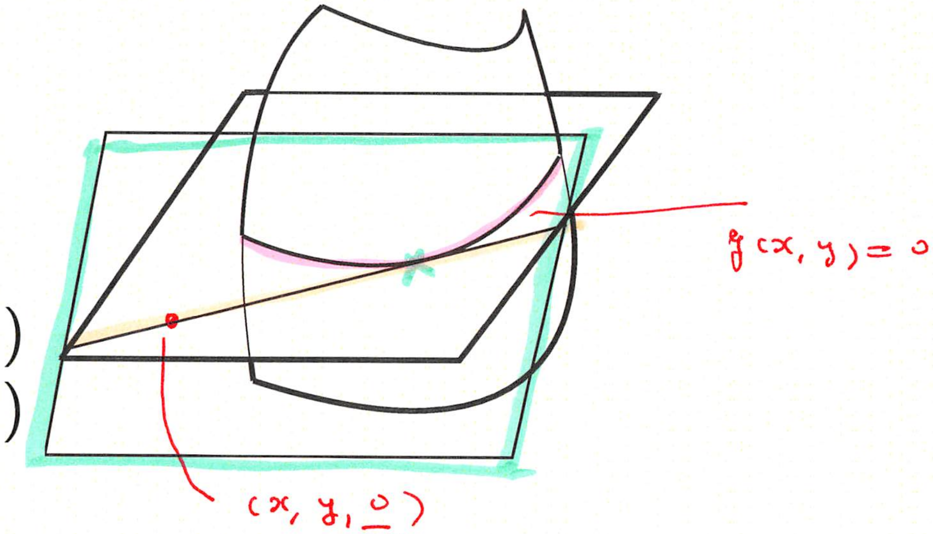
$$z = g(x, y)$$

の接平面を $(a, b, 0)$ で考えると

$$z = g_x(a, b) \cdot (x - a) + g_y(a, b) \cdot (y - b) \quad (2)$$

0

$+ 0$



となります．

接平面と $x - y$ 平面の交わりは $x - y$ 座標では

$$g_x(a, b) \cdot (x - a) + g_y(a, b) \cdot (y - b) = 0$$

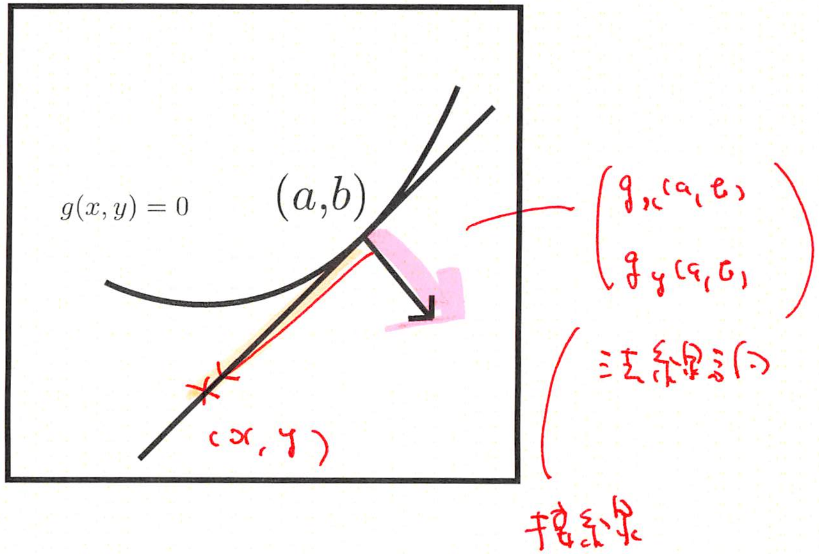
となります． これは接線の方程式となります．

Gradient Vector

方程式 (2) は内積を用いて

$$\begin{pmatrix} g_x(a,b) \\ g_y(a,b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = 0$$

と表されます.



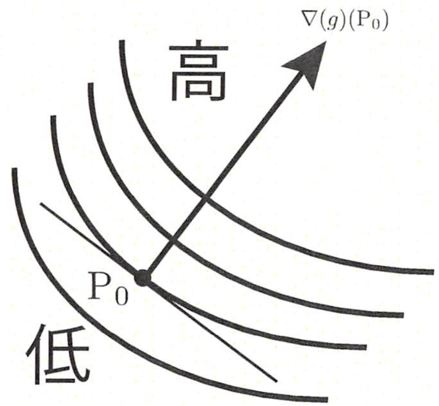
これからベクトル

nabla

$$\nabla(g)(a,b) := \begin{pmatrix} g_x(a,b) \\ g_y(a,b) \end{pmatrix}$$

が接線に垂直であることが分かります. $\nabla(g)(a,b)$ を g の (a,b) における勾配ベクトル（**gradient vector**） と呼びます.

Gradient Vector —その向きは？



勾配ベクトルは g が大きくなる方向に向いています．登っていくときに最もきつい方向です．

例

単位円 $g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$ について考えます．g の偏導関数は

$$g_x = 2x, \quad g_y = 2y$$

ですから，したがって単位円上の点 (a,b) の接線は

$$2a(x-a) + 2b(y-b) = 0$$

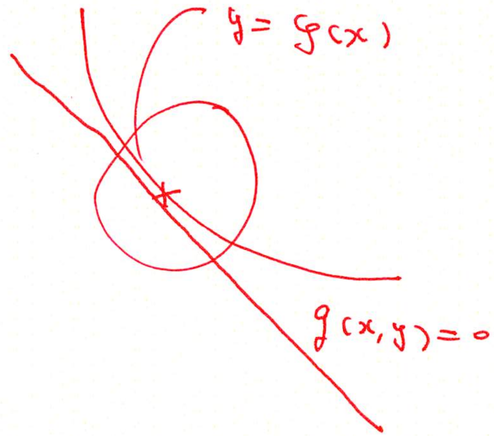
となります．

陰関数の微分

曲線 C が (a,b) の近くで $y=\varphi(x)$ と表されていて，$g_y(a,b)\neq 0$ が成立するとします．このとき (a,b) における接線は

$g_x(a,b)(x-a)+g_y(a,b)(y-b)=0$

$\neq 0$

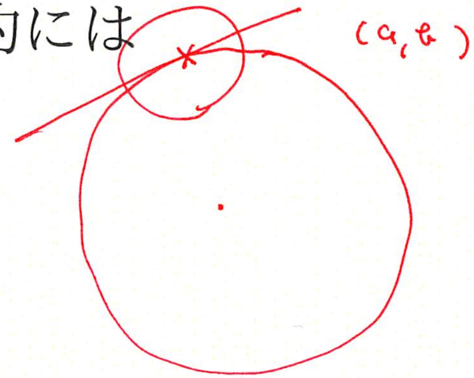


$$y=-\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}(x-a)+b$$

となりますから，接線の傾きを考えて

$$\varphi'(a)=-\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}$$

であることが分かります．例えば曲線（単位円）$g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ を $b>0$ を満たす (a,b) で考えると，曲線は直接的には



$y^2=1-x^2$

↓

$y=\sqrt{1-x^2}$

$$y=\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$$

と表されますが，

$g_x=2x$

$g_y=2y$

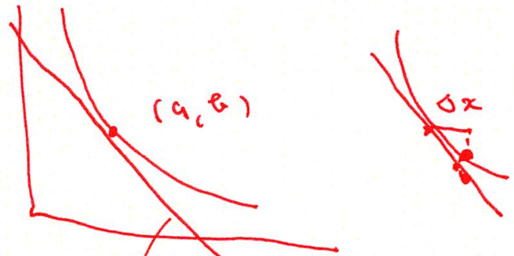
$$\varphi'(a)=-\frac{2a}{2b}=-\frac{a}{b}$$

が成立することが分かります．

限界代替率（Marginal Rate of Substitution (MRS)）

単位

消費者が商品 A,B をそれぞれ x, y 購入するときの効用が効用関数 $u(x,y)$ で与えられるとします．
このとき



$$u(x,y) = u(a,b)$$

を (a,b) を通る無差別曲線（**Indifference Curve**）と呼びます．このとき (a,b) における限界代替率（**Marginal Rate of Substitution**）を

$$\mathrm{MRS} = \frac{u_x(a,b)}{u_y(a,b)}.$$

傾き

$$-\frac{u_x(a,b)}{u_y(a,b)}$$

と定義します．A の購入量を a から微小量 Δx だけ効用一定の下で（無差別曲線に沿って）増加させると，$\mathrm{MRS} \times \Delta x$ だけ B を減少させることになります．

Part 3 a.

2 次正方行列 (No.1)

Nobuyuki TOSE

MSF2019, April 30, 2019（平成最後の講義）

$$X = (\vec{a}\ \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$X\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

行列の積の基本性質

$X = (\vec{a}\ \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{p}+\vec{q} = \begin{pmatrix} p_1+q_1 \\ p_2+q_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\lambda\vec{p} = \begin{pmatrix} \lambda p_1 \\ \lambda p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

線型性

$$X(\vec{p}+\vec{q}) = X\vec{p}+X\vec{q}, \quad X(\lambda\vec{p}) = \lambda(X\vec{p})$$

$(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

$\vec{a} \in \mathbb{R}^n$

$$LHS = X\begin{pmatrix} p_1+q_1 \\ p_2+q_2 \end{pmatrix} = (p_1+q_1)\vec{a}+(p_2+q_2)\vec{b} = p_1\vec{a}+q_1\vec{a}+p_2\vec{b}+q_2\vec{b}$$

$$= (p_1\vec{a}+p_2\vec{b})+(q_1\vec{a}+q_2\vec{b}) = X\vec{p}+X\vec{q} = RHS$$

$$LHS = X\begin{pmatrix} \lambda p_1 \\ \lambda p_2 \end{pmatrix} = (\lambda p_1)\vec{a}+(\lambda p_2)\vec{b}$$

$(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$

$$= \lambda(p_1\vec{a})+\lambda(p_2\vec{b})$$

$\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

$$= \lambda(p_1\vec{a}+p_2\vec{b}) = \lambda(X\vec{p}) = RHS$$

行列の積の基本性質 (2)

X 2次正方行列

$\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \lambda\vec{p} + \mu\vec{q} \in \mathbb{R}^2$

線型性 (2)

$$X(\lambda\vec{p} + \mu\vec{q}) = \lambda(X\vec{p}) + \mu(X\vec{q})$$

$$\begin{aligned} LHS &= X(\lambda\vec{p}) + X(\mu\vec{q}) \\ &= \lambda(X\vec{p}) + \mu(X\vec{q}) \end{aligned}$$

$$X(s\vec{p} + t\vec{q}) = s(X\vec{p}) + t(X\vec{q})$$

$X = (\vec{a}\ \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ 2次正方行列

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \underset{\overset{\shortparallel}{X\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}}{x\vec{a} + y\vec{b}} = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

$$w \longmapsto g(w)$$

$$x \longmapsto f(x)$$

$$w \longmapsto \underset{\overset{\shortparallel}{f\circ g\,(x)}}{f(g(x))}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \boxed{\begin{matrix} s\vec{p} + t\vec{q} \\ \shortparallel \\ Y\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x\vec{a} + y\vec{b} = X\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$Y = (\vec{p}\ \vec{q}) = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$$

$$f\circ g\left(\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right) = f\left(g\left(\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right)\right) = f\left(\boxed{Y\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}}\right) = X\left(Y\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right)$$

$$\shortparallel$$

結合法則

$$f(s\vec{p} + t\vec{q}) = X(s\vec{p} + t\vec{q}) = s(X\vec{p}) + t(Y\vec{q})$$

$$= \boxed{(X\vec{p}\quad Y\vec{q})}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

$X\vec{p},\ Y\vec{q} \in \mathbb{R}^2$

XYの定義 $\longrightarrow$ $X(\vec{p}\ \vec{q}) = XY$

$$\boxed{(XY)\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = X\left(Y\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right)}$$

2次正方行列の積

$$X = (\vec{a}\ \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad Y = (\vec{p}\ \vec{q}) = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$$

に対して

$p_1\vec{a} + p_2\vec{b}$
$\shortparallel$

$p_1\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + p_2\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ $\shortparallel$

$$\begin{aligned} XY = X(\vec{p}\ \vec{q}) &:= (X\vec{p}\ X\vec{q}) \\ &= (\boxed{p_1\vec{a} + p_2\vec{b}}\ \ \boxed{q_1\vec{a} + q_2\vec{b}}) \\ &= \begin{pmatrix} p_1a_1 + p_2b_1 & q_1a_1 + q_2b_1 \\ p_1a_2 + p_2b_2 & q_1a_2 + q_2b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_1\ b_1)\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} & (a_1\ b_1)\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \\ (a_2\ b_2)\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} & (a_2\ b_2)\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$= q_1\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + q_2\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$xa + yb = (x\ \ y)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$xa + yb + zc$
$= (x\ \ y\ \ z)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

結合法則

結合法則 (1)

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ $=$ 　　$\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$ $=$

2 次正方行列 $X = (\vec{a}\ \vec{b})$, $Y = (\vec{p}\ \vec{q})$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ に対して

$$X(Y\vec{c}) = (XY)\vec{c} \quad \rightsquigarrow \quad XY\vec{c}$$

と書いてよい.

2次正方行列.

線型性

$$LHS = X(c_1\vec{p} + c_2\vec{q}) = c_1(X\vec{p}) + c_2(X\vec{q})$$

$$= \underbrace{(X\vec{p}\ X\vec{q})}_{= XY}\vec{c} = (XY)\vec{c} = \text{右辺}.$$

$X\vec{p}, X\vec{q} \in \mathbb{R}^2$

結合法則

結合法則 (2)

$Z = (\vec{c}\ \vec{d}) = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ とすると

$X = (\vec{a}\ \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ 2次正方行列

$Y = (\vec{p}\ \vec{q}) = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$ 〃

$\rightarrow$ XY: 2次正方行列

$$(XY)Z = X(YZ)$$

$$\begin{aligned} LHS &= (XY)(\vec{c}\ \vec{d}) = \Big((XY)\vec{c}\ (XY)\vec{d}\Big) \\ &= \Big(X(Y\vec{c})\ X(Y\vec{d})\Big) = X\left(Y\vec{c}\ Y\vec{d}\right) \\ &= X(YZ) \end{aligned}$$

$Y\vec{c},\ Y\vec{d} \in \mathbb{R}^2$

連立 1 次方程式と行列式

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{cases} \quad \left(\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \right) \qquad (\#)$$

を考える． $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ のとき

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = 0, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

よって

(#) に 自明解 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$ しかない．

$$\boxed{D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0 \Rightarrow \left((\#) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \right)}$$

連立１次方程式と行列式 (2)

$\forall \binom{x}{y} \left((\#) \Rightarrow \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \right) \not\Rightarrow D = 0$

$\in \mathbb{R}^2$

$\neg (P \Rightarrow Q)$

$\equiv P \wedge \neg Q$

逆の対偶

$\exists \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$

非自明解が存在する.

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underline{ad - bc = 0} \Rightarrow \left(\exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{が} \ (\#) \ \text{を満たす} \right)$$

これを示すために

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 0 \\ -bc + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \vec{0}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} ad - bc \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \vec{0}$$

$ad - bc \neq 0$ のとき

$ad - bc = 0$

$ad - bc = 0$

に注意する.

連立1次方程式と行列式(3)

(i) $\underline{a \neq 0 \text{ OR } b \neq 0}$のとき

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \text{AND} \quad \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

(ii) $\underline{c \neq 0 \text{ OR } d \neq 0}$のとき

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \text{AND} \quad \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

(iii) $\underbrace{\text{NOT (i)}}_{a=0\text{ かつ }b=0}$ AND $\underbrace{\text{NOT (ii)}}_{c=0\text{ かつ }d=0}$ $\Leftrightarrow a = b = c = d = 0$

$$O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \right)$$

連立1次方程式と行列式 (4)

定理

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \right)$$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \iff \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ かつ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$.

固有値問題

Part 3 6

2 次正方行列の逆行列・回転行列・直交射影

次回

Nobuyuki TOSE

経済数学, May 07, 2019

2次正方行列の積

a_{ij} 　 i 行 (横) j 列 (縦)

$$A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

2次正方行列

に対して

$(a\ b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by$

$$A\vec{x} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$$

$(a_{11}\ a_{12})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$= x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\vec{x} \\ \mathbf{a}_2\vec{x} \end{pmatrix}$$

$= (a_{21}\ a_{22})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

2次正方行列

$$AB := \left(\underset{\mathbb{R}^2}{A\vec{b}_1}\ \ \underset{\mathbb{R}^2}{A\vec{b}_2}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\vec{b}_1 & \mathbf{a}_1\vec{b}_2 \\ \mathbf{a}_2\vec{b}_1 & \mathbf{a}_2\vec{b}_2 \end{pmatrix}$$

行列の積の基本性質

線型性

$$X(\vec{p}+\vec{q}) = X\vec{p} + X\vec{q}, \quad X(\lambda\vec{p}) = \lambda\,(X\vec{p})$$

$$\begin{aligned}
LHS &= X\left(\begin{smallmatrix} p_1+q_1 \\ p_2+q_2 \end{smallmatrix}\right) = (p_1+q_1)\vec{a} + (p_2+q_2)\vec{b} \\
&= (p_1\vec{a} + p_2\vec{b}) + (q_1\vec{a} + q_2\vec{b}) = X\vec{p} + X\vec{q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
LHS &= X\begin{pmatrix} \lambda p_1 \\ \lambda p_2 \end{pmatrix} = (\lambda p_1)\,\vec{a} + (\lambda p_2)\,\vec{b} \\
&= \lambda(p_1\vec{a}) + \lambda(p_2\vec{b}) \\
&= \lambda(p_1\vec{a} + p_2\vec{b}) = \lambda(X\vec{p})
\end{aligned}$$

行列の積の基本性質 (2)

線型性 (2)

$$X(\lambda\vec{p} + \mu\vec{q}) = \lambda(X\vec{p}) + \mu(X\vec{q})$$

$$\begin{aligned} LHS &= X(\lambda\vec{p}) + X(\mu\vec{q}) \\ &= \lambda(X\vec{p}) + \mu(X\vec{q}) \end{aligned}$$

結合法則

結合法則 (1)

2 次正方行列 $X = (\vec{a}\ \vec{b})$, $Y = (\vec{p}\ \vec{q})$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ に対して

$$X(Y\vec{c}) = (XY)\vec{c}$$

$$\begin{aligned} LHS &= X(c_1\vec{p} + c_2\vec{q}) = c_1(X\vec{p}) + c_2(X\vec{q}) \\ &= (X\vec{p}\ X\vec{q})\vec{c} = (XY)\vec{c} \end{aligned}$$

結合法則

結合法則 (2)

$Z = (\vec{c}\ \vec{d}) = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$(XY)Z = X(YZ)$$

$$\begin{aligned} LHS &= (XY)(\vec{c}\ \vec{d}) = \left((XY)\vec{c}\ (XY)\vec{d}\right) \\ &= \left(X(Y\vec{c})\ X(Y\vec{d})\right) = X\left(Y\vec{c}\ Y\vec{d}\right) \\ &= X(YZ) \end{aligned}$$

単位行列 (1)

$O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ゼロ行列.

$$\text{標準単位ベクトル} \qquad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$m=2$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

を用いて単位行列

$$I_2 = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が定義できます．2 列の行列 $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2)$ に対して

$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}$

m行2列

$$A\vec{e}_1 = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}_1$$

$(\vec{a}_1, \vec{a}_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$= x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2$

$$A\vec{e}_2 = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{a}_1 + 1 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}_2$$

従って

$$AI_2 = (A\vec{e}_1 \ A\vec{e}_2) = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2) = A$$

A 2列の行列 (2次正方行列)

$AI_2 = A$

単位行列 (2)

$\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ のとき

$I_2 \vec{x} = \vec{x}$

$$\mathbf{R}^2 \ni \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 = (\vec{e}_1 \ \ \vec{e}_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = I_2 \vec{x}$$

2行の行列 B に対して

$I_2 B = B$

から，2 次正方行列 $B = (\vec{b}_1 \ \ \vec{b}_2)$ に対して　$\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in \mathbb{R}^2$

$$I_2 B = I_2 (\vec{b}_1 \ \ \vec{b}_2) = (I_2 \vec{b}_1 \ \ I_2 \vec{b}_2) = (\vec{b}_1 \ \ \vec{b}_2) = B$$

B : 2行3列　$B = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3)$　$\vec{e}_j \in \mathbb{R}^2 \ (j = 1, 2, 3)$

$I_2 B = I_2 (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3) = (I_2 \vec{e}_1 \ I_2 \vec{e}_2 \ I_2 \vec{e}_3) = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3) = B$

余因子行列

$$\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$$

$$|A|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = |A| \cdot I_2$$

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = |A| \cdot I_2$$

調.

A の余因子行列を $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ と定めると

$$A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = |A| \cdot I_2$$

$$A\cdot\tilde{A} = \tilde{A}\cdot A = |A|\cdot I_2 \qquad \boxed{1\cdot A = A}$$

$|A| \neq 0$ として $\frac{1}{|A|}\cdot$

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{|A|}(A\cdot\tilde{A}) & = & \frac{1}{|A|}(\tilde{A}\cdot A) & = & \frac{1}{|A|}(|A| I_2) \\
\parallel & & \parallel & & \parallel \ (2) \\
A\cdot\left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right) & & \left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right)\cdot A & & \left(\frac{1}{|A|}\cdot|A|\right)I_2 = 1\cdot I_2 = I_2
\end{array}$$

公式の証明 (1)

(1) は $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(\lambda A)\,\vec{b} = A\left(\lambda\vec{b}\right) = \lambda\left(A\vec{b}\right)$$

$\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

をまず示す.

$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
$= \mu(\lambda\vec{a})$

$$(\lambda A)\,\vec{b} = (\lambda\vec{a}_1\ \lambda\vec{a}_2)\,\vec{b} = b_1(\lambda\vec{a}_1) + b_2(\lambda\vec{a}_2)$$

$$= \lambda\,(b_1\vec{a}_1 + b_2\vec{a}_2) = \lambda\left(A\vec{b}\right)$$

$\shortparallel$

$\lambda(b_1\vec{a}_1) + \lambda(b_2\vec{a}_2)$

$= (\lambda b_1)\,\vec{a}_1 + (\lambda b_2)\,\vec{a}_2 = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2)\begin{pmatrix} \lambda b_1 \\ \lambda b_2 \end{pmatrix}$
$= A(\lambda\vec{b})$

従って

$$(\lambda A)\,B = \left((\lambda A)\vec{b}_1\ (\lambda A)\vec{b}_2\right) = \left(A(\lambda\vec{b}_1)\ A(\lambda\vec{b}_2)\right)$$

$$= A\left(\lambda\vec{b}_1\ \lambda\vec{b}_2\right) = A\,(\lambda B)$$

$= (\lambda(A\vec{b}_1)\ \lambda(A\vec{b}_2))$
$= \lambda\,(A\vec{b}_1\ A\vec{b}_2) = \lambda\,(AB)$

余因子行列 (2)

公式

$A, B \in M_2(\mathbf{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ に対して

$$(\lambda A)\, B = A\,(\lambda B) = \lambda(AB) \tag{1}$$

$$\lambda\,(\mu A) = (\lambda\mu) A \tag{2}$$

を用いると

A^{-1} になる.

$$|A| = ad - bc \neq 0 \quad \text{ならば} \quad A \cdot \left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right) = \left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right) \cdot A = I_2$$

注意

$$\lambda A = (\lambda \vec{a}_1 \ \ \lambda \vec{a}_2)$$

公式の証明 (2)

$$\lambda(AB) = \lambda(A\vec{b}_1\ A\vec{b}_2) = (\lambda(A\vec{b}_1)\ \lambda(A\vec{b}_2))$$
$$= \left(A(\lambda\vec{b}_1)\ A(\lambda\vec{b}_2)\right) = A\left(\lambda\vec{b}_1\ \lambda\vec{b}_2\right) = A(\lambda B)$$

(2) を示すには

$$\boxed{\lambda\left(\mu\vec{b}\right) = (\lambda\mu)\vec{b}}$$

を用います. (2) は各自示す.

正則行列 (1)–定義

正則行列

$A \in M_2(\mathbf{R})$ が正則とは

$$AX = XA = I_2$$

を満たす $X \in M_2(\mathbf{R})$ が存在するときである.

注意（逆行列の一意性）

$$AX = XA = I_2, \quad AY = YA = I_2$$

とすると

$$X = XI_2 = X(AY) \overset{(*)}{=} (XA)Y = I_2Y = Y$$

と $X = Y$ が従う. 存在すれば一意的に定まるこの行列を A の逆行列と呼んで A^{-1} と記します.（(*) において結合則を用いています.）

正則行列 (2)

$|A| \neq 0$ のとき　　$A \cdot \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} \cdot A = I_2$

定理

$A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbf{R})$ とします．$|A| \neq 0$ ならば A は正則で

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

注意

$(1) \to (2)$

(3)

$$(1)\ |A| \neq 0 \Rightarrow (2)\ A\text{は正則}$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} (3)\ \left(A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0} \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}\right)$$

$A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0} \longrightarrow A^{-1} \cdot A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$

$(A^{-1}A)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = I_2\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$

正則行列 (3)

(3)⇒(1) の対偶

$$|A| = 0 \ \Rightarrow \ \exists \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \vec{0} \quad A \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}$$

$|A| = 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から

$$A \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \vec{0}, \quad A \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \vec{0}$$

となる.

$$d \neq 0 \ \vee c \neq 0 \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} \neq \vec{0}, \quad b \neq 0 \ \vee a \neq 0 \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

正則行列 (4)

これに当てはまらない場合は $a = b = c = d = 0$, すなわち $A = O_2$ となる．このときは明らか：

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad O_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$(1)\ |A| \neq 0 \Leftrightarrow (2)\ A\text{は正則}$$
$$\Leftrightarrow\ (3)\ \left(A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0} \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}\right)$$