経済数学入門 2020 年 5 月 18 日演習問題

I 次の行列の積を求めましょう．

(1) $\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}$ **(3)** $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$

解答

(1) $\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1c_2 + c_1b_2 \\ 0 & b_1b_2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 \\ c_1a_2 + b_1c_2 & b_1b_2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & b_1b_2 \end{pmatrix}$

II A, P は 2 次正方行列とします．P が正則であるとき，帰納法を用いて

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

であることを示しましょう．

解答

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

とすると

$$\begin{aligned}(P^{-1}AP)^{n+1} &= (P^{-1}AP)^n(P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}A^nP \cdot P^{-1}AP \\ &= P^{-1}A^n(PP^{-1})AP \\ &= P^{-1}A^nI_2AP = P^{-1}A^nAP = P^{-1}A^{n+1}P\end{aligned}$$

から帰納法によりすべての自然数 n に対して

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

が成立する．

III 以下のベクトルの外積を計算しましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(3)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

解答 (1)

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&2\\1&-1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&3\\1&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&1\\3&-1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&2\\3&-1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\7\\-3\end{pmatrix}$$

IV(1) $Q=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}$ に対して Q^2 を求めましょう.
(2) (1) を用いて Q^{-1} を求めましょう.

解答 (1)

$$Q^2=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2\theta+\sin^2\theta&00&\sin^2\theta+\cos\theta^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$$

となります.
(2) (1) から Q は正則で

$$Q^{-1}=Q$$

であることが分かります.

V 以下の $\vec{a},\vec{b}$ に対して $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ を求めましょう.
(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **(2)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$ **(3)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$

解答 (1)

$$\vec{w}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a}=\frac{2}{3}\vec{a}$$

(2)

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{a}$$

(3)

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a} = \frac{2}{2}\vec{a} = \vec{a}$$

VI

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して $||\vec{a} - t\vec{b}||^2$ を最小にする t を求めましょう.

解答

$$\begin{aligned} ||\vec{a}||^2 &= 1 + 4 + 9 + 16 = 30 \\ (\vec{a}, \vec{b}) &= 1 + (-2) + 3 + 4 = 6 \\ ||\vec{b}||^2 &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} ||\vec{a} - t\vec{b}||^2 &= ||\vec{a}||^2 - 2t(\vec{a}, \vec{b}) + ||\vec{b}||^2 \\ &= 4t^2 - 12t + 30 = 4\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + 21 \end{aligned}$$

となります. 従って $t = \frac{3}{2}$ のとき最小値 21 を取ります.

VIII 以下の計算をしましょう.

(i) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

解答 (i)

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix}\\=&\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&2\\5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&10\\15&10\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix}\\=&\begin{pmatrix}3&6\\5&10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&5\\7&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&11\\12&15\end{pmatrix}\end{aligned}$$

IX $A, B \in M_n(\mathbf{K})$ とします.
(1) A が正則ならば A^{-1} も正則であることを示しましょう.
(2) A, B が正則ならば積 AB も正則であることを示しましょう.

解答 (1)

$$A^{-1}A = A^{-1} = I_n$$

から A は正則で $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ であることが分かります.
(2)

$$AB \cdot (B^{-1}A) = A(B^{-1}B)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1}) \cdot AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

から AB は正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ であることが分かります.

X $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ が $\vec{a} \neq \vec{0}$ を満たすとします. $c\vec{a} = \vec{0}$ ならば $c = 0$ となることを示しましょう.

解答 $\vec{a} \neq \vec{0}$ ですから $\vec{a} = {}^t(a_1\ \ldots\ a_i\ \vec{d}ots\ a_n)$ とすると, ある i に関して第 i 成分について $a_i \neq 0$ が成立します. このとき

$$c\vec{a} = {}^t(ca_1\ \ldots\ ca_i\ \ldots\ ca_n) = \vec{0}$$

となりますから $ca_i = 0$ となります. $a_i \neq 0$ ですから $c = 0$ であることが従います.

別解 $||c\vec{a}|| = |c| \cdot ||\vec{a}|| = 0$ において $||\vec{a}|| > 0$ が成立しますから, $c = 0$ となります.

XI $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}||^2 = ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 + ||\vec{c}||^2 + 2(\vec{a},\vec{b}) + 2(\vec{b},\vec{c}) + 2(\vec{a},\vec{c})$$

が成立することを示しましょう.（「線型代数学」教科書 13 ページ、演習 1.17）

解答

$$\begin{aligned}||\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}||^2 &= ||\vec{a}+\vec{b}+||^2+2(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})+||\vec{c}||^2\\ &= ||\vec{a}||^2+2(\vec{a},\vec{b})+||\vec{b}||^2+2(\vec{a},\vec{c})+2(\vec{b},\vec{c})+||\vec{c}||^2\\ &= ||\vec{a}||^2+||\vec{b}||^2+||\vec{c}||^2+2(\vec{a},\vec{b})+2(\vec{b},\vec{c})+2(\vec{a},\vec{c})\end{aligned}$$

XII $\vec{a}\in\mathbf{R}^n$ がすべての $\vec{x}\in\mathbf{R}^n$ に対して垂直，すなわち

$$(\vec{a},\vec{x})=0 \quad (\vec{x}\in\mathbf{R}^n)$$

が成立するとします．このとき $\vec{a}=\vec{0}$ となることを示しましょう．(「線型代数学」教科書 13 ページ、演習 1.19)

解答　$\vec{x}=\vec{a}$ とすると

$$||\vec{a}||^2=(\vec{a},\vec{a})=0$$

から $\vec{a}=\vec{0}$ が従います.

注意 $\vec{a}\in\mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{a}||=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$$

が成立します.

XIII $\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3}\in\mathbf{R}^n$ が

$$(\vec{f_i},\vec{f_j})=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

を満たすとします.

(1)

$$||x\vec{f_1}+y\vec{f_2}||^2=x^2+y^2$$

$$||x\vec{f_1}+y\vec{f_2}+z\vec{f_3}||^2=x^2+y^2+z^2$$

を示しましょう.

(2)$\vec{g}\in\mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{g}-x\vec{f_1}-y\vec{f_2}||^2=||\vec{g}||^2+x^2+y^2-2x(\vec{g},\vec{f_1})-2y(\vec{g},\vec{f_2})$$

が成立することを示しましょう.

解答 (1)

$$\begin{aligned}
||x\vec{f_1}+y\vec{f_2}||^2 &= ||x\vec{f_1}||^2+2(x\vec{f_1},y\vec{f_2})+||y\vec{f_2}||^2 \\
&= x^2||\vec{f_1}||^2+2xy(\vec{f_1},\vec{f_2})+y^2||\vec{f_2}||^2 \\
&= x^2\cdot 1+2xy\cdot 0+y^2\cdot 1 = x^2+y^2 \\
||x\vec{f_1}+y\vec{f_2}+z\vec{f_3}||^2 &= ||x\vec{f_1}+y\vec{f_2}||^2+2(x\vec{f_1}+y\vec{f_2},z\vec{f_3})+||z\vec{f_3}||^2 \\
&= x^2+y^2+2xz(\vec{f_1},\vec{f_3})+2yz(\vec{f_2},\vec{f_3})+z^2||\vec{f_3}||^2 \\
&= x^2+y^2+2xz\cdot 0+2yz\cdot 0+z^2\cdot 1 = x^2+y^2+z^2
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
||\vec{g}-x\vec{f_1}-y\vec{f_2}||^2 &= ||\vec{g}||^2-2(x\vec{f_1}+y\vec{f_2},\vec{g})+||x\vec{f_1}+y\vec{f_2}||^2 \\
&= ||\vec{g}||^2-2x(\vec{f_1}+y\vec{f_2},\vec{g})-2y(\vec{f_2},\vec{g})+x^2+y^2 \\
&= ||\vec{g}||^2+x^2+y^2-2x(\vec{g},\vec{f_1})-2y(\vec{g},\vec{f_2})
\end{aligned}$$

XIV $\vec{a}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ とします。$\vec{w}$ を $\vec{v}\in\mathbf{R}^2$ の $\vec{a}$ 方向の直交射影とします。このとき

$$\vec{q}=\vec{v}+2(\vec{w}-\vec{v})=2\vec{w}-\vec{v}$$

に対して

$$\vec{q}=Q\vec{v}$$

を満たす行列 Q を求めましょう。さらに

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

のとき Q を求めましょう。

解答

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

とすると

$$\vec{w}=\frac{(\vec{a},\vec{v})}{||\vec{a}||^2}=\frac{\alpha x+\beta y}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix}\alpha^2x+\alpha\beta y\\ \alpha\beta x+\beta^2y\end{pmatrix}=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta\\ \alpha\beta & \beta^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

から

$$\vec{q}=2\vec{w}-\vec{v}=\left(\frac{2}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta\\ \alpha\beta & \beta^2\end{pmatrix}-I_2\right)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix}\alpha^2-\beta^2 & 2\alpha\beta\\ 2\alpha\beta & -\alpha^2+\beta^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

となりますから

$$Q=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix}\alpha^2-\beta^2 & 2\alpha\beta\\ 2\alpha\beta & -\alpha^2+\beta^2\end{pmatrix}$$

となります．特に $\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ のとき

$$Q = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

となります.