intro2020

第4講

01. 回転行列・直交射影・折り返し

~~01.5 直交行列~~ → 次回 残差.

02. 2次元部分空間・直交射影

03. 回帰直線と相関係数

04. 2次元固有値問題.

2 次正方行列の逆行列・回転行列・直交射影

この部分.

Nobuyuki TOSE

経済数学, May 07, 2019

回転行列

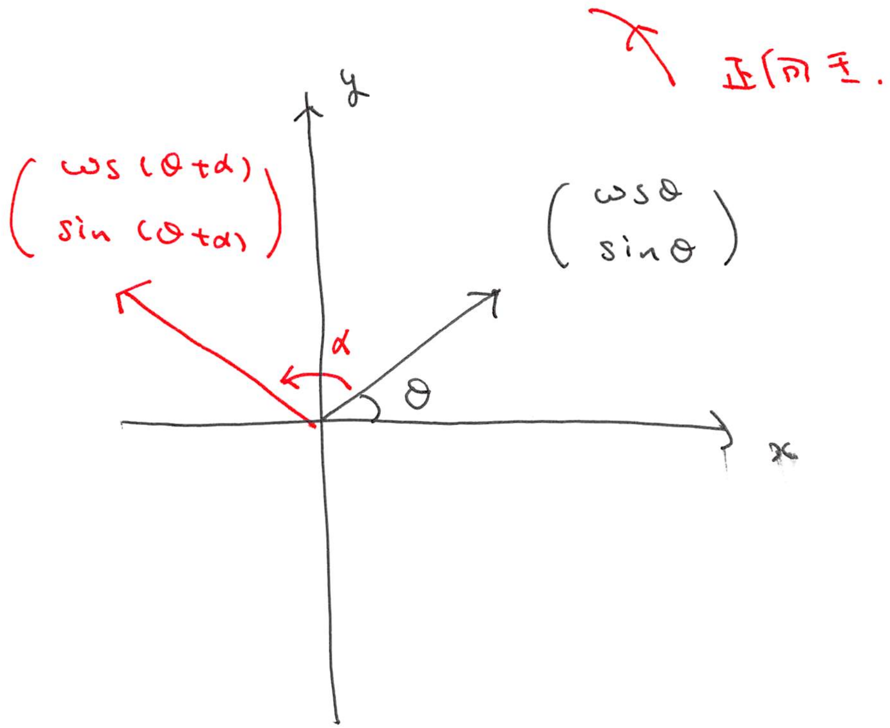
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

$R_\alpha \cdot R_\beta = R_{\alpha+\beta}$

$R_\alpha \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$

特に

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$$


正向き.
y
x
$\begin{pmatrix} \cos(\theta+\alpha) \\ \sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$
α
θ

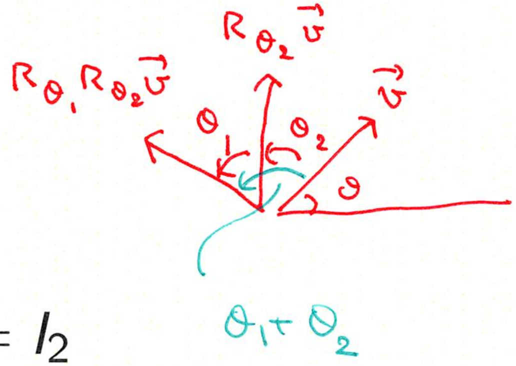
回転行列 (2)

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

回転行列
rotation

とすると

$$R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2}$$

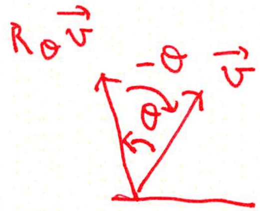


特に

$$R_\theta \underbrace{R_{-\theta}}_{X} = \underbrace{R_{-\theta}}_{X} R_\theta = R_0 = I_2$$

から R_θ は正則で

$$R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$$



$A \in M_2(\mathbb{R})$ が正則
$\underset{\text{def.}}{\iff}$ $AX = XA = I_2$ を満たす
$X \in M_2(\mathbb{R})$ が存在する.

折り返し (2)——直交射影

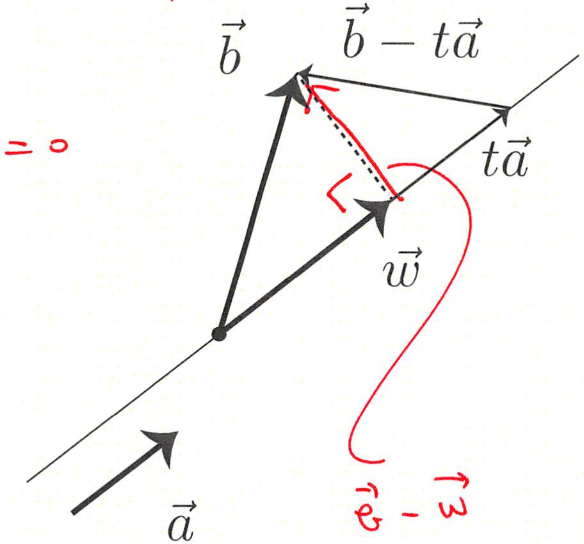
$\vec{w}$

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ であるとき．$\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影は

① $\vec{w} = t\vec{a}$

② $(\vec{b} - \vec{w}, \vec{a}) = 0$

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a}$$



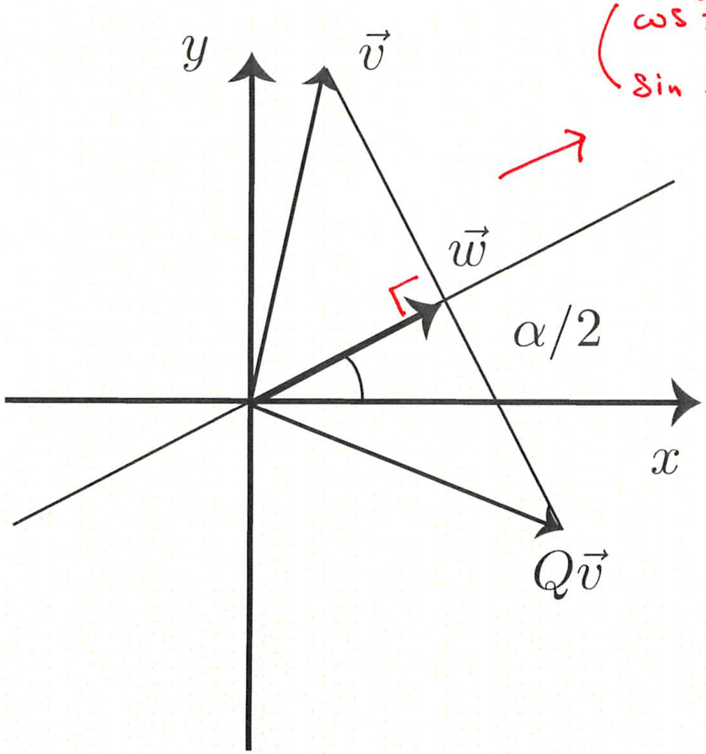
求め方 (1) $(\vec{a}, \vec{b} - t\vec{a}) = 0$
求め方 (2) $\|\vec{b} - t\vec{a}\|^2$ を最小化

折り返し (1)

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$= Q$



$\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$

$y = \left(\tan\frac{\alpha}{2}\right) x$

折り返し

鏡映.

$Q^2\vec{v} = \vec{v}$

$= I_2\vec{v}$

$A: 2\times 2$, $B: 2\times 2$

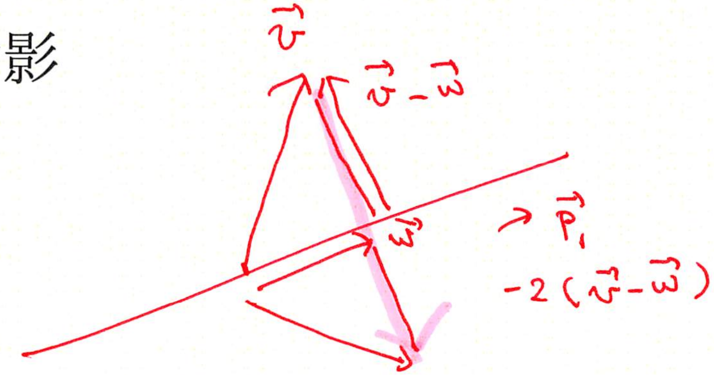
$\left(\begin{array}{l} \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \\ A\vec{v} = B\vec{v} \end{array}\right)$

$\Rightarrow A = B.$

折り返し(3)

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ 方向への直交射影

$\|\vec{p}_1\|^2 = 1$



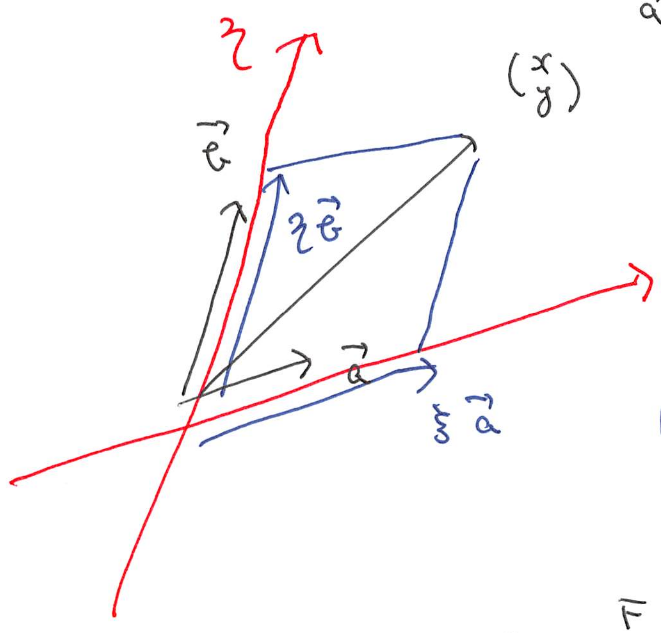
$$\begin{aligned}
\vec{w} &= \frac{(\vec{v}, \vec{p}_1)}{\|\vec{p}_1\|^2}\vec{p}_1 \\
&= (x\cos\frac{\alpha}{2} + y\sin\frac{\alpha}{2})\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x\cos^2\frac{\alpha}{2} + y\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ x\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} + y\sin^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\alpha}{2} & \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} & \sin^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=\vec{v}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q\vec{v} &= \vec{v} - 2(\vec{v} - \vec{w}) = 2\vec{w} - \vec{v} \\
&= \left(2\begin{pmatrix} \cos^2\frac{\alpha}{2} & \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} & \sin^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} - I_2\right)\vec{v}
\end{aligned}$$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 & 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} & 2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 1 \end{pmatrix}\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\vec{v}$$

$= 2(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}) - 1 =$



$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2 \quad \vec{a} \nparallel \vec{b}$

$P = (\vec{a}\ \vec{b})$ 正則.

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \xi\vec{a} + \eta\vec{b}$$
$$= (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$$

P^{-1}。$\rangle$

$$\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

F: 全射 $\quad \forall\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} \Rightarrow P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = P \cdot P^{-1}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$$
$$= I_2\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$$

F: 単射 $\quad P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ P^{-1}!

$$\underset{\displaystyle I_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}{\underset{\shortparallel}{P^{-1}P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}} = P^{-1}P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = I_2\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

別の見方—座標変換

$\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

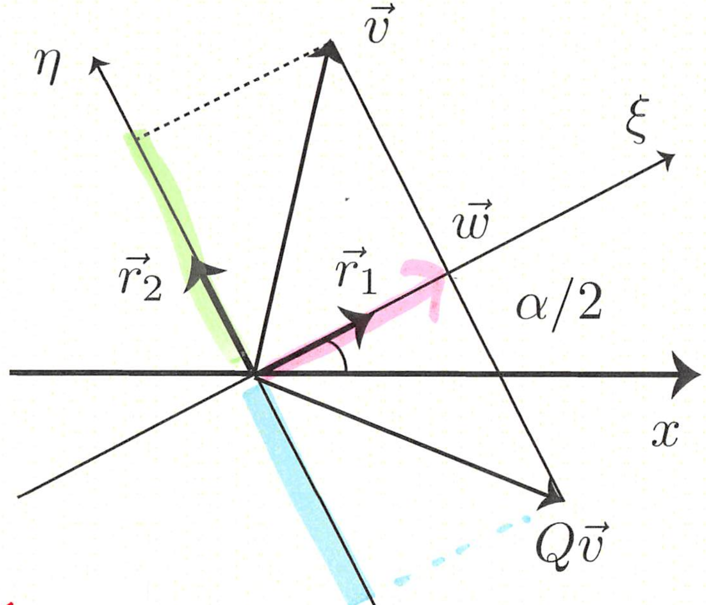
$$\vec{r}_1=\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha}{2}\\ \sin\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix},\quad \vec{r}_2=\begin{pmatrix}-\sin\frac{\alpha}{2}\\ \cos\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix}$$

$R=(\vec{r}_1\ \vec{r}_2)$
$=R_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\xi\vec{r}_1+\eta\vec{r}_2=R\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

のとき

$\rightsquigarrow$ $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=R^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$



$$Q\vec{v}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\xi\vec{r}_1-\eta\vec{r}_2=R\begin{pmatrix}\xi\\-\eta\end{pmatrix}$$
$$=R\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$
$$=R\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}R^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$R^{-1}=R_{-\frac{\alpha}{2}}=\begin{pmatrix}\cos(-\frac{\alpha}{2}) & -\sin(-\frac{\alpha}{2})\\ \sin(-\frac{\alpha}{2}) & \cos(-\frac{\alpha}{2})\end{pmatrix}$

$$Q=R\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}R^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha}{2}&-\sin\frac{\alpha}{2}\\ \sin\frac{\alpha}{2}&\cos\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha}{2}&\sin\frac{\alpha}{2}\\ -\sin\frac{\alpha}{2}&\cos\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\ \sin\alpha&-\cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$A : 2 \times 2$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{P^{-1} A P} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$= \xi \vec{P_1} + \eta \vec{P_2}$$

Lect 04
Part 02.

ベクトルの内積とその応用

戸瀬　信之

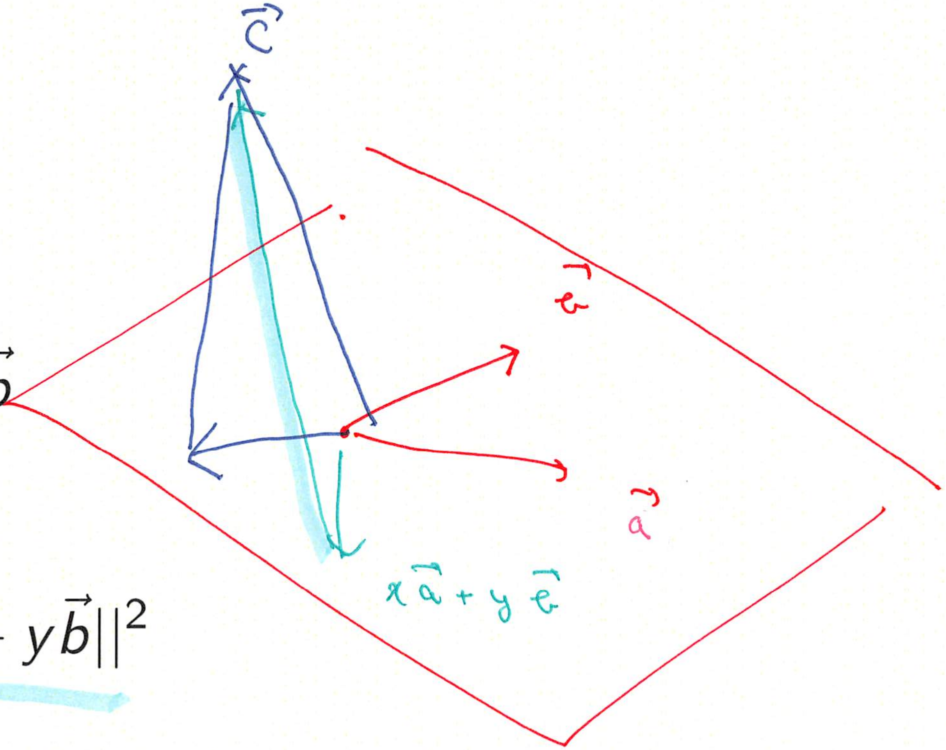
ITOSE PROJECT

MSF2019，Lec 04, 2019 年 04 月 30 日（平成最後の講義）

問題 II

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ が

$$\vec{a} \nparallel \vec{b}$$



を満たすときに, $\vec{c} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{c} - x\vec{a} - y\vec{b}||^2$$

を最小化する $x, y \in \mathbf{R}$ を求める.

$L = L(\vec{a}, \vec{b})$

$= \{x\vec{a} + y\vec{b} \in \mathbb{R}^n ; x, y \in \mathbb{R}\}$

$\vec{a}, \vec{b}$ が定める2次元部分空間.

$$\|\vec{a} \pm \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \pm 2(\vec{a}, \vec{b}) + \|\vec{b}\|^2$$

$$\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2$$

$$\|$$

$$\|\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})\|^2 \qquad + 2(\vec{a}, \vec{b}) + 2(\vec{a}, \vec{c}) + 2(\vec{b}, \vec{c})$$

まず $\vec{a} \perp \vec{b}$ のとき

$\vec{a} \perp \vec{b}$ の場合を考える.

$\|x\vec{a}\|^2 + \underbrace{2(x\vec{a}, y\vec{b})}_{=0} + \|y\vec{b}\|^2$

$$\begin{aligned}
||\vec{c} - x\vec{a} - y\vec{b}||^2 &= ||\vec{c}||^2 - 2(\vec{c}, x\vec{a} + y\vec{b}) + ||x\vec{a} + y\vec{b}||^2 \\
&= x^2||\vec{a}||^2 + y^2||\vec{b}||^2 - 2x(\vec{c}, \vec{a}) - 2y(\vec{c}, \vec{b}) + ||\vec{c}||^2 \\
&= ||\vec{a}||^2\left(x - \frac{(\vec{c}, \vec{a})}{||\vec{a}||^2}\right)^2 + ||\vec{b}||^2\left(y - \frac{(\vec{c}, \vec{b})}{||\vec{b}||^2}\right)^2 \\
&\quad + ||\vec{c}||^2 - \frac{(\vec{c}, \vec{a})^2}{||\vec{a}||^2} - \frac{(\vec{c}, \vec{b})^2}{||\vec{b}||^2}
\end{aligned}$$

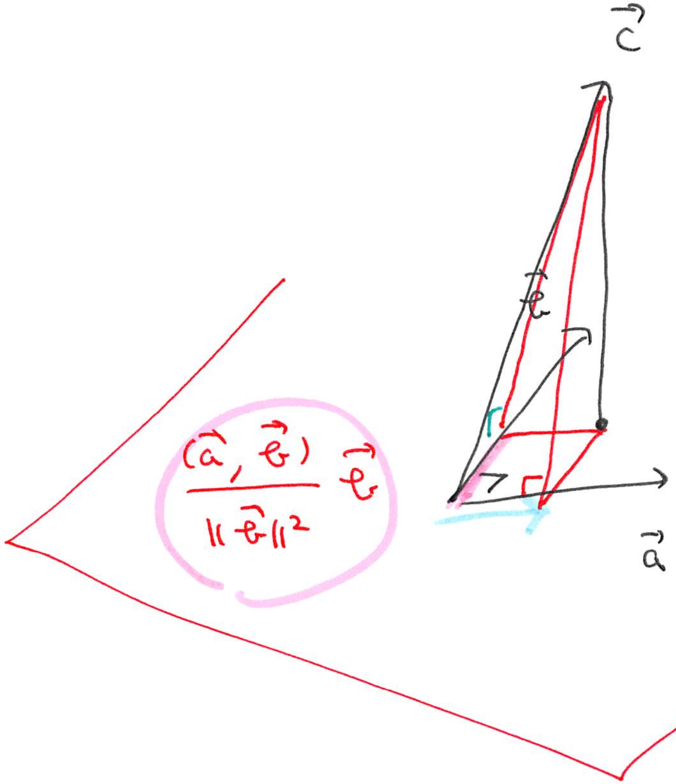
から

$$x = \frac{(\vec{c}, \vec{a})}{||\vec{a}||^2}, \quad y = \frac{(\vec{c}, \vec{b})}{||\vec{b}||^2}$$

のとき最小となる。この意味は？

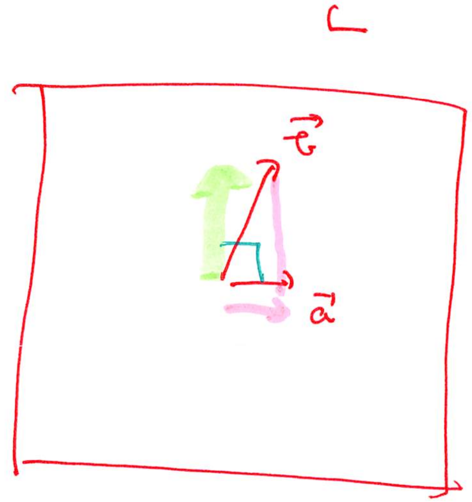
$$\vec{c} - x\vec{a} - y\vec{b} \perp \underbrace{\vec{a}, \vec{b}}_{L}$$

のと云[illegible]い.



$$\frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b}$$

$$\boxed{\frac{(\vec{c}, \vec{a})}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}}$$



三垂線の定理.

(⇒) $\vec{p} \nparallel \vec{q} \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$

対偶 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{p} \parallel \vec{q}$ を示す.

$\exists \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ に対して $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$

$$\underbrace{(\vec{p}\ \vec{q}) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{= c_1 \vec{p} + c_2 \vec{q}} = (\vec{a}\ \vec{b}) \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{= \vec{0}} = (\vec{a}\ \vec{b})\, \vec{0} = \vec{0}$$

$$L = L(\vec{a}, \vec{b}) \ni x_0 \vec{a} + y_0 \vec{b} = (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} \nparallel \vec{q} \ \left(\iff \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0 \right) \quad = (\vec{p}\ \vec{q}) \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = *_1 \vec{p} + \#_1 \vec{q}$$

$$*_1 \vec{p} + \#_1 \vec{q} = *_2 \vec{p} + \#_2 \vec{q}$$

$$\to (*_1 - *_2)\vec{p} + (\#_1 - \#_2)\vec{q}$$

$$\xrightarrow[\vec{p} \nparallel \vec{q}]{} *_1 = *_2, \ \#_1 = \#_2$$

結論

Lの任意のベクトルに$x_0\vec{a} + y_0\vec{b}$

が $*\vec{p} + \#\vec{q}$ と

一意的に表せます。

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ $\quad L = L(\vec{a}, \vec{b}) = \{ x\vec{a} + y\vec{b} \,;\, x, y \in \mathbb{R} \}$

$\cup$

$\vec{p}, \vec{q}$

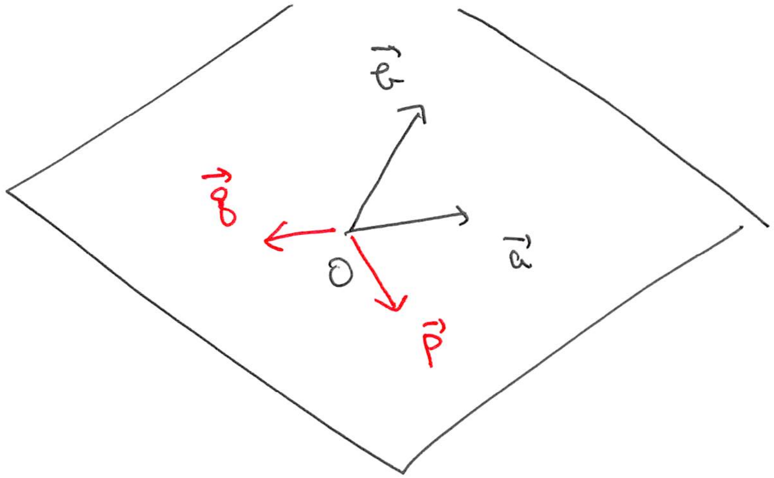
$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\parallel$$

$$c_1\vec{a} + c_2\vec{b}$$

$$\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$$

$$\vec{q} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b}$$



$$(\vec{p}\ \vec{q}) = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{p} \nparallel \vec{q} \iff \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0}$$

($\Leftarrow$) $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$ とする.

$c_1\vec{p} + c_2\vec{q} = \vec{0}$ とする

$$\parallel$$

$$(\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b})\boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}}_{\text{正則}}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}} \overset{\vec{0}}{=}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\longrightarrow \vec{p} \nparallel \vec{q}$$

$\vec{p}, \vec{q}$ と $\vec{a}, \vec{b}$ の関係.

$$\vec{p} = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$$

$$\vec{q} = \frac{1}{\|\vec{b}-\vec{w}\|}(\vec{b}-\vec{w}) = \frac{1}{\|\vec{b}-\vec{w}\|}\left(\vec{b} - \frac{(\vec{b},\vec{a})}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}\right)$$

注 $\vec{b}-\vec{w}=\vec{0} \longrightarrow \vec{b} = * \, \vec{a} \longrightarrow \vec{b} \parallel \vec{a}$ 仮定に反する $\vec{a} \nparallel \vec{b}$

グラム・シュミットの直交化—例

$$(\vec{p}\ \vec{q}) = \begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{||\vec{a}||} & -\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{b}-\vec{w}||\cdot||\vec{a}||^{2}} \\ 0 & \frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow |\ |$

$= \frac{1}{||\vec{a}||}\cdot\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}$

$\neq 0$

から

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \xi\vec{p} + \eta\vec{q} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{||\vec{a}||} & -\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{b}-\vec{w}||\cdot||\vec{a}||^{2}} \\ 0 & \frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

正則.

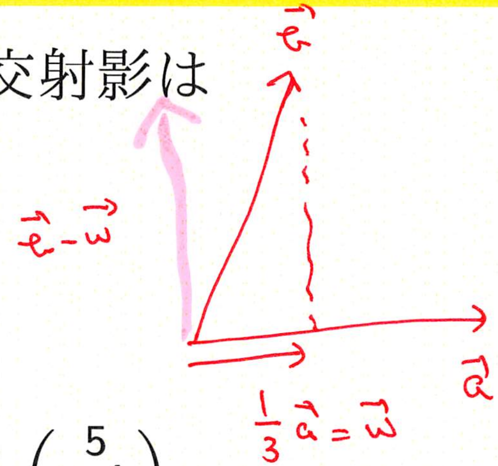
となりますから

$$L = \{\xi\vec{p} + \eta\vec{q};\ \xi,\eta \in \mathbf{R}\}$$

であることが分かります.

グラム・シュミットの直交化—例

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向の直交射影は



$$\vec{w} = \frac{(\vec{b}, \vec{a})}{||\vec{a}||^2}\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{a}$$

$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$25 + 16 + 1$

ここで

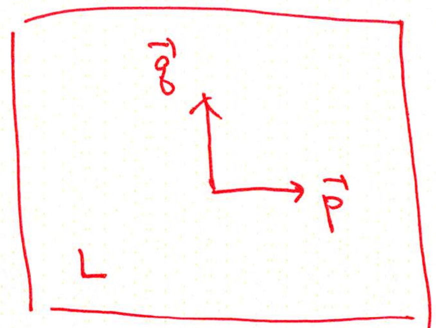
$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{p} = \frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{||\vec{b} - \vec{w}||}(\vec{b} - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

は $||\vec{p}|| = ||\vec{q}|| = 1$, $(\vec{p}, \vec{q}) = 0$ を満たし

$= \{x\vec{a} + y\vec{e}\ ;\ x, y \in \mathbb{R}\}$

$$L := \cancel{\{x\vec{p} + y\vec{q};\ x, y \in \mathbf{R}\}}$$



の正規直交基底と呼びます.

グラム・シュミットの直交化—例

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

このとき $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき

$= ||\vec{c} - x\vec{a} - y\vec{b}||$

$$||\vec{c} - \boxed{\xi\vec{p} - \eta\vec{q}}||^2 = (\xi - (\vec{c}, \vec{p}))^2 + (\eta - (\vec{c}, \vec{q}))^2 + ||\vec{c}||^2 - (\vec{c}, \vec{p})^2 - (\vec{c}, \vec{q})^2$$

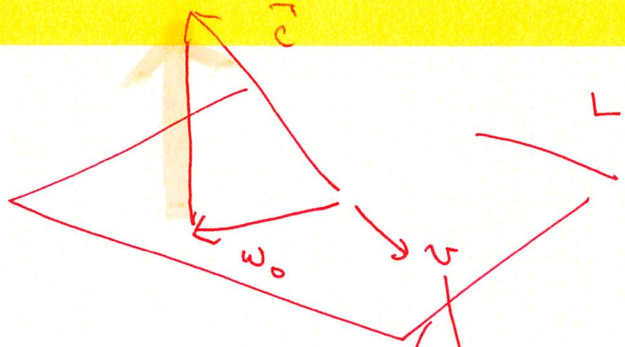
から最小になるのは

$$\xi = (\vec{c}, \vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \eta = (\vec{c}, \vec{q}) = \frac{1}{\sqrt{42}} \; 5$$

であることが分かります.

問 以上の計算から $||\vec{c} - x\vec{a} - \vec{y}||^2$ を最小化する $x, y \in \mathbf{R}$ を求めましょう.

グラム・シュミットの直交化—例



$\vec{w}_0 = (\vec{c}, \vec{p})\vec{p} + (\vec{c}, \vec{q})\vec{q}$ と定めると

$$(\vec{c} - \vec{w}_0, \vec{p}) = (\vec{c}, \vec{p}) - (\vec{c}, \vec{p})\underbrace{||\vec{p}||^2}_{=1} - (\vec{c}, \vec{q})\underbrace{(\vec{q}, \vec{p})}_{=0}$$
$$= (\vec{c}, \vec{p}) - (\vec{c}, \vec{p}) = 0$$
$$(\vec{c} - \vec{w}_0, \vec{q}) = (\vec{c}, \vec{q}) - (\vec{c}, \vec{q})\underbrace{(\vec{p}, \vec{q})}_{=0} - (\vec{c}, \vec{q})\underbrace{||\vec{q}||^2}_{=1}$$
$$= (\vec{c}, \vec{q}) - (\vec{c}, \vec{q}) = 0$$

$(\vec{c} - (\vec{c}, \vec{p})\vec{p} - (\vec{c}, \vec{q})\vec{q}, \vec{q})$

から

$$\vec{c} - \vec{w}_0 \perp L$$

が分かります．$\vec{w}_0$ を $\vec{c}$ の L への直交射影と呼びます．

Lの任意のベクトル $= *\vec{p} + \#\vec{q}$

$(\vec{v}, \vec{c} - \vec{w}_0)$
$= (*\vec{p} + \#\vec{q}, \vec{c} - \vec{w}_0)$
$= *\underbrace{(\vec{p}, \vec{c} - \vec{w}_0)}_{=0} + \#\underbrace{(\vec{q}, \vec{c} - \vec{w}_0)}_{=0}$

Part 03.

第 7 講義–回帰直線と相関係数

戸瀬　信之

$$\rho_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sqrt{V(x)}\sqrt{V(y)}}$$

ITOSE PROJECT

$|\rho_{xy}| \to 1$

(x, y) は 直線的に 分布する.

経済数学入門，2019 年 05 月 27 日 at HC

モデル

- **2** 変量のデータ

  モデル

  $$y = ax + b$$

  でデータに fit するものを考える。

説明変数　目的変数.

x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

誤差がない.

- (誤差) = (実測値) − (理論値)

  $$\epsilon = y - (ax + b)$$

- **(1)** $\bar{\epsilon} = 0$

  $$\bar{\epsilon} = \bar{y} - a\bar{x} - b = 0$$

  $b = \bar{y} - a\bar{x}$

- **(2)** $V(\epsilon)$ が最小

最小分散

- **(2)** $V(\epsilon)$ が最小

$$\epsilon_i = y_i - ax_i - b = y_i - ax_i - (\bar{y} - a\bar{x}) = y_i - \bar{y} - a(x_i - \bar{x})$$

から（このとき $\bar{\epsilon} = 0$ に注意して）

$$\underbrace{\vec{\epsilon}}_{= \frac{1}{\sqrt{n}}(\varepsilon_i - \underbrace{\bar{\varepsilon}}_{=0})} = \frac{1}{\sqrt{n}}(y_i - \bar{y} - a(x_i - \bar{x})) = \vec{y} - a\vec{x}$$

$$\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \vdots \\ \bar{x} \end{pmatrix}$$

-

$$\begin{aligned} V(\epsilon) &= \|\vec{y} - a\vec{x}\|^2 \\ &= a^2 \underbrace{\|\vec{x}\|^2} - 2a(\vec{x}, \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2 \\ &= \underbrace{\|\vec{x}\|^2}_{\vee\, 0} \underbrace{\left(a - \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\|^2}\right)}_{\shortparallel\, 0}{}^2 + \|\vec{y}\|^2 - \frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{\|\vec{x}\|^2} \end{aligned}$$

回帰直線

$y = ax + b$

- 回帰直線

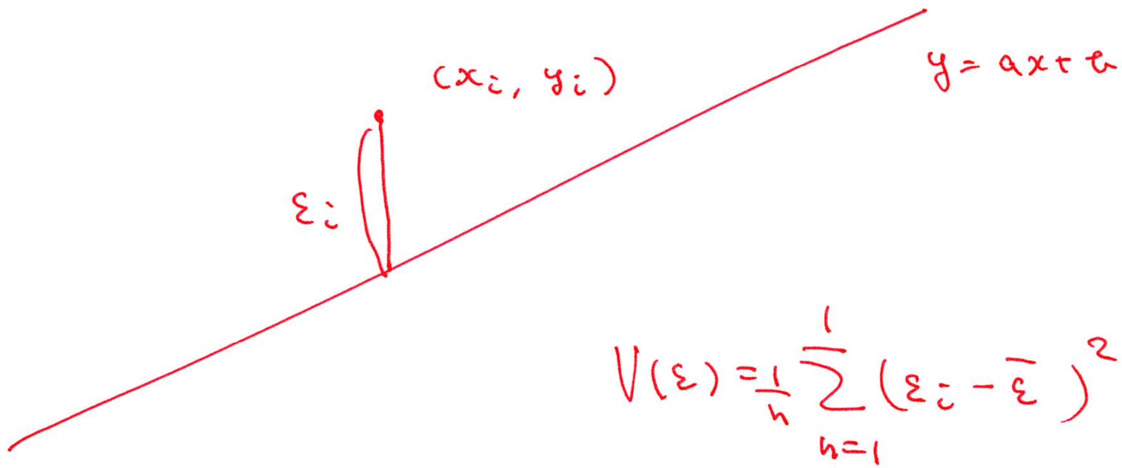
$$a = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{||\vec{x}||^2} = \frac{C_{xy}}{V(x)}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

- 回帰直線に対して

平方残差　residual square.

$$\begin{aligned} V(\epsilon) &= ||\vec{y}||^2 - \frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{||\vec{x}||^2} \\ &= ||\vec{y}||^2 \left(1 - \frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{||\vec{x}||^2 ||\vec{y}||^2}\right) = V(y)(1 - \rho_{xy}^2) \end{aligned}$$

- $\rho_{xy} \to \pm 1$ のとき $V(\epsilon) \to 0$



$$V(\varepsilon) = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{1} (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$$

$$\bar{\varepsilon} = 0$$

最小二乗法

- $$S(a,b) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$$

  を最小にする a と b を求めても、同じ回帰直線を得る。

Part 07.

2 次正方行列の固有値問題

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

2019 年 05 月 emath.HC

A : 2×2 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

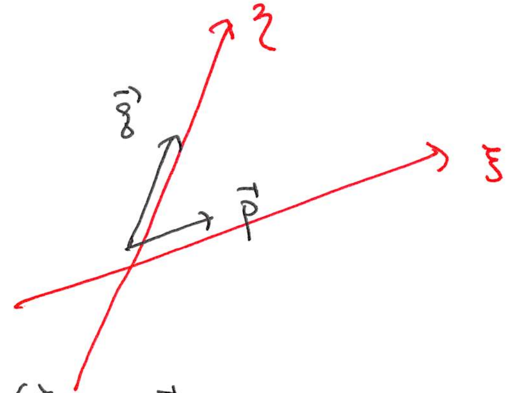
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ のとき $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 4x+3y \end{pmatrix}$

$\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^2$, $|\vec{p}\ \vec{q}| \neq 0$

$\Updownarrow$

$P = (\vec{p}\ \vec{q})$ 正則.



座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \vec{p} + \eta \vec{q} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1} A P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

P をうまく選んで $P^{-1}AP$ を単純化.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow AP = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = (\alpha \vec{p}_1\ \beta \vec{p}_2)$$

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) =$$

$$(A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (\alpha \vec{p}_1\ \beta \vec{p}_2)$$

P : 正則 $\rightarrow \vec{p}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{p}_2 \neq \vec{0}$

2次正方行列の固有方程式

$B : 2\times 2$

B：正則 $\Longleftrightarrow$ $(B\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow \vec{v}=\vec{0})$ $\Longleftrightarrow$ $|B|\neq 0$

$\exists\, \vec{v}\neq\vec{0}$ に対して $\Longleftrightarrow$ $|B|=0$

- 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有多項式

$a+d = \mathrm{tr}(A)$

トレース, 跡, シュプール

Spur

Aの固有多項式

$$
\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) &= |\lambda I_2 - A| \\
&= \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} \\
&= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc \\
&= \lambda^2 - (a+d)\lambda + \underbrace{\det(A)}_{=|A|}
\end{aligned}
$$

$= \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{pmatrix}$

$= (\lambda - a)(\lambda - d) - bc$

-

$$\Phi_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{A\vec{v} = \alpha\vec{v}}_{\Updownarrow}\text{を満たす}\vec{v}\neq\vec{0}\text{が存在}$$

$|\alpha I_2 - A| = 0 \Longleftrightarrow (\alpha I_2 - A)\vec{v} = \vec{0}$

具体例

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ の固有多項式 $= |\lambda I_2 - A|$

$\lambda I_2 - A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) &= \left| \underbrace{\begin{matrix} \lambda - 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 3 \end{matrix}}_{\lambda I_2 - A} \right| \\
&= \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1)
\end{aligned}$$

- 固有値 $\lambda = 5$ の固有ベクトルを求める。

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow (5I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 4x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $x = 1$ に対応

$A\vec{p}_1 = 5\vec{p}_1$

固有値5の

固有ベクトルに含まれる

具体例 (No. 2)

- 固有値 $\lambda = -1$ の固有ベクトルを求める。

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow (-I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow -2x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

から

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

固有ベクトル

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

$\vec{p_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A\vec{p_2} = -\vec{p_2}$

行列の対角化（その意味）

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2 \iff \underset{\overset{\|}{P}}{(\vec{p}_1\ \vec{p}_2)}$ は正則

- A が定める変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = * \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

  行列

- 変数変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \vec{p}_1 + \eta \vec{p}_2 = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \xi' \vec{p}_1 + \eta' \vec{p}_2 = P \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

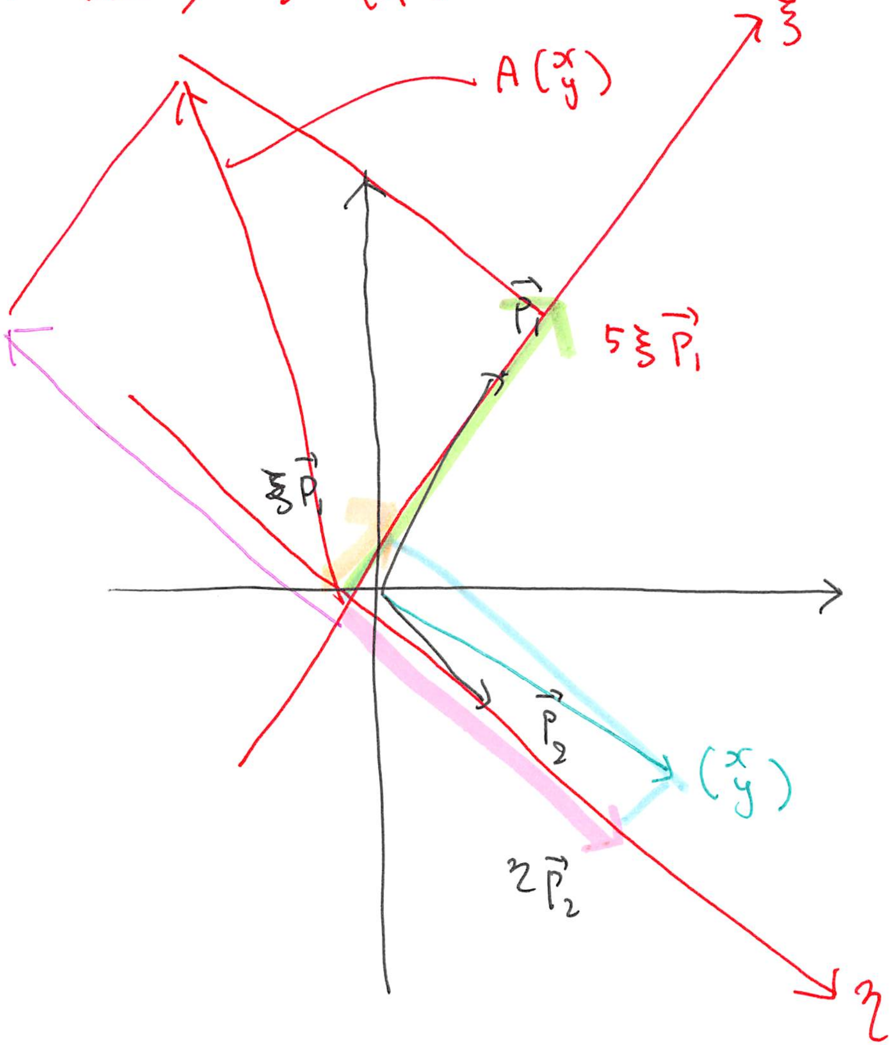
-

行列の対角化（その意味）(No.2)

-

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} &= P^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= P^{-1}AP\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\xi \\ -\eta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi\vec{p}_1 + \eta\vec{p}_2$$

線型性

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi A\vec{p}_1 + \eta A\vec{p}_2$$

$$= \xi \cdot 5\vec{p}_1 + \eta(-1)\vec{p}_2$$

$$= 5(\xi\vec{p}_1) + (-1)\eta\vec{p}_2$$

行列の対角化（その応用）

- 対角化 $A = P\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}P^{-1}$

$$
\begin{aligned}
A^2 &= P\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\overbrace{P^{-1}P}^{= I_2}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= P\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}I_2\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= P\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix}5^2 & 0\\ 0 & (-1)^2\end{pmatrix}P^{-1}\\
A^n &= P\begin{pmatrix}5^n & 0\\ 0 & (-1)^n\end{pmatrix}P^{-1}
\end{aligned}
$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \# \\ 0 & \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot \alpha' & \$ \\ 0 & \beta \cdot \beta' \end{pmatrix}$$ 上三角

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ * & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ \# & \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot \alpha' & 0 \\ \$ & \beta \cdot \beta' \end{pmatrix}$$ 下三角

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' & 0 \\ 0 & \beta\beta' \end{pmatrix}$$ 对角.

行列の対角化

- $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ とすると

$$(\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\vec{p}_1 + y\vec{p}_2$$

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (5\vec{p}_1\ -\vec{p}_2) \\ &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix}5 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}5 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x\vec{p}_1 + y\vec{p}_2 + z\vec{p}_3$$

$\vdots$

- $\det(P) = \begin{vmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{vmatrix} = -3 \neq 0$ から P は正則 ← 一般論があって不要になる
- A は対角化可能

$$A = P\begin{pmatrix}5 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$AP = P\begin{pmatrix}5 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P^{-1}\cdot} P^{-1}AP = \begin{pmatrix}5 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$ 対角化.

行列の対角化（一般論）

- 定理　2 次正方行列 A の固有多項式

$A \in M_2(\mathbb{R})$, $\underbrace{\alpha, \beta \in \mathbb{R}}$

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

$(\alpha I_2 - A)\vec{p} = \vec{0}$, $\vec{p} \neq \vec{0}$

$\exists \vec{p} \in \mathbb{R}^2$ でとれる.

に対して、$\alpha \neq \beta$ が成立するとする。このとき A は対角化可能です。すなわち正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になります。

- $A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1$、$A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2$ で $\vec{p}_i \neq \vec{0}$ $(i = 1, 2)$

$\rightarrow (\beta I_2 - A)\vec{p}_2 = \vec{0}$

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix}\vec{p}_1 & \vec{p}_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}A\vec{p}_1 & A\vec{p}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\vec{p}_1 & \beta\vec{p}_2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\vec{p}_1 & \vec{p}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0 \\ 0 & \beta\end{pmatrix} \end{aligned}$$

$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ とすると

$AP = P\begin{pmatrix}\alpha & 0 \\ 0 & \beta\end{pmatrix}$　　P が正則か?

行列の対角化（一般論）(No.2)

$B(x\vec{p}_1 + y\vec{p}_2) = xB\vec{p}_1 + yB\vec{p}_2$

- $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ の正則性
- 定理 2 次正方行列 P に対して

$$P\text{は正則} \iff \det(P) \neq 0$$
$$\iff \left(P\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{c} = \vec{0}\right)$$

- $c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ を示す。

$c_1(\beta I_2 - A)\vec{p}_1 + c_2\overbrace{(\beta I_2 - A)\vec{p}_2}^{=0}$

$= c_1(\beta\vec{p}_1 - \alpha\vec{p}_1)$

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0}$$
$$\to (\beta I_n - A)(c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2) = (\beta - \alpha)c_1\vec{p}_1 = \vec{0}$$
$$\to c_1\vec{p}_1 = \vec{0} \to c_1 = 0$$

2

$\to c_1 = 0 \to c_2\vec{p}_2 = \vec{0}$

$\beta \neq \alpha$

$\to c_2 = 0$

$\vec{p}_2 \neq \vec{0}$

- 注意 $\vec{q} \neq \vec{0}$ ならば $\left(c\vec{q} = \vec{0} \iff c = 0\right)$