第 5 講義 06 月 01 日　演習問題解答

I (1) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$ {}^t(\vec{a}+\vec{b}) = {}^t\vec{a} + {}^t\vec{b}, \quad {}^t(\lambda\vec{a}) = \lambda({}^t\vec{a}) $$

が成立することを示しましょう.

(2) 2 次正方行列 $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$ {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB, \quad {}^t(\lambda A) = \lambda({}^tA) $$

が成立することを示しましょう.

解答 (1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ に対して

$$ \begin{aligned} {}^t(\vec{a}+\vec{b}) &= {}^t\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} \\ &= (a_1+b_1 \ \cdots \ a_n+b_n) \\ &= (a_1 \ \cdots \ a_n) + (b_1 \ \cdots \ b_n) \\ &= {}^t\vec{a} + {}^t\vec{b} \end{aligned} $$

(2)

$$ \begin{aligned} {}^t(\lambda\vec{a}) &= {}^t\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} \\ &= (\lambda a_1 \ \cdots \ \lambda a_n) \\ &= \lambda(a_1 \ \cdots \ a_n) \\ &= \lambda {}^t\vec{a} \end{aligned} $$

II $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$ (A\vec{v}, \vec{w}) = \left(\vec{v}, {}^tA\vec{w}\right) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2) $$

が成立することを用いて

$$ {}^t(AB) = {}^tB{}^tA $$

を導きましょう.

解答

$$ \begin{aligned} (AB\vec{v}, \vec{w}) &= \left(\vec{v}, {}^t(AB)\vec{w}\right) \\ (AB\vec{v}, \vec{w}) &= \left(B\vec{v}, {}^tA\vec{w}\right) \\ &= \left(\vec{v}, {}^tB{}^tA\vec{w}\right) \end{aligned} $$

から任意の $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$ \left(\vec{v}, {}^t(AB)\vec{w}\right) = \left(\vec{v}, {}^tB{}^tA\vec{w}\right) $$

が従います．このことから任意の $\vec{w} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$ {}^t(AB)\vec{w} = {}^tB{}^tA\vec{w} $$

が成立することが従います．これから

$$ {}^t(AB) = {}^tB{}^tA $$

であることが従います.

III $R_1, R_2 \in M_2(\mathbf{R})$ を直交行列であるとします．このとき R_1R_2 と ${}^tR_1$ が直交であることを証明しましょう.

解答

$$ {}^t(R_1R_2)R_1R_2 = {}^tR_2{}^tR_1R_1R_2 = {}^tR_2I_2R_2 = {}^tR_2R_2 = I_2 $$

$$ R_1R_2{}^t(R_1R_2) = R_1R_2{}^tR_2{}^tR_1 = R_1I_2{}^tR_1 = R_1{}^tR_1 = I_2 $$

から R_1R_2 が直交であることが分かります．他方

$$ {}^t\left({}^tR_1\right){}^tR_1 = R_1{}^tR_1 = I_2 $$

$$ {}^tR_1{}^t\left({}^tR_1\right) = {}^tR_1R_1 = I_2 $$

から ${}^tR_1$ が直交であることが分かります．

> **IV** $R \in M_2(\mathbf{R})$ が回転行列ならば $R^{-1} = {}^tR$ であることを示しましょう．

解答 $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とします．このとき $|R| = \cos^2\theta + \sin\theta^2\theta = 1 \neq 0$ から

$$ R^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = {}^tR $$

であることが分かります．

> **V** 次の行列の積を計算しましょう．（計算の意味を考えてみましょう．）
>
> $$ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} $$

解答

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\beta-\alpha) & \sin(\beta-\alpha) \\ \sin(\beta-\alpha) & -\cos(\beta-\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\beta-\alpha)\cos\alpha+\sin(\beta-\alpha)\sin\alpha & -\cos(\beta-\alpha)\sin\alpha+\sin(\beta-\alpha)\cos\alpha \\ \sin(\beta-\alpha)\cos\alpha-\cos(\beta-\alpha)\sin\alpha & -\sin(\beta-\alpha)\sin\alpha-\cos(\beta-\alpha)\cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\beta-2\alpha) & \sin(\beta-2\alpha) \\ \sin(\beta-2\alpha) & -\cos(\beta-2\alpha) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$