第 6 講義 06 月 08 日　演習問題解答

I f は $\mathbf{R}$ 上の微分可能な関数とします.
(1) $F(x,y) := f(x^2+y^2)$ と $\mathbf{R}^2$ 上の関数を定義します. $\nabla(F)(x,y)$ を求めましょう.
(2) $y \neq 0$ のとき $G(x,y) := f(\frac{x}{y})$ を定義します. $\nabla(G)(x,y)$ を求めましょう.

解答 (1)

$$F_x = f'(x^2+y^2)\cdot 2x$$
$$F_y = f'(x^2+y^2)\cdot 2y$$

から

$$\nabla(F)(x,y) = 2f'(x^2+y^2)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$$

(2)

$$G_x = f'(\frac{x}{y})\cdot\frac{1}{y}$$
$$G_y = f'(\frac{x}{y})\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

から

$$\nabla(G)(x,y) = f'(\frac{x}{y})\begin{pmatrix} \frac{1}{y} \\ -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{y^2}f'(\frac{x}{y})\left(\begin{smallmatrix} y \\ -x \end{smallmatrix}\right)$$

II (1) $f(x,y,z) = e^x + e^{2y} + e^{3z}$ とします. $\nabla(f)(0,0,0)$ を求めましょう. </dd>
(2) $g(x,y,z) = e^{x+2y+3z}$ とします. $\nabla(g)(0,0,0)$ を求めましょう.

解答 (1)

$$f_x = e^x$$
$$f_y = 2e^{2y}$$
$$f_z = 3e^{3z}$$

から

$$\nabla(f)(0,0,0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$$

(2)

$$g_x = e^{x+2y+3z}$$
$$g_y = 2e^{x+2y+3z}$$
$$g_z = 3e^{x+2y+3z}$$

から

$$\nabla(g)(0,0,0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$$

III f の P_0 における $\vec{v}$ 方向の微分 $D_{\vec{v}}(f)(\mathrm{P}_0)$ を求めましょう.
(1) $f(x,y) = x+2y-1$ at $\mathrm{P}_0(1,2)$ in the direction $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$
(2) $f(x,y) = x^2+2xy-y^3$ at $\mathrm{P}_0(1,1)$ in the direction $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$

解答 (1)

$$f_x = 1,\quad f_y = 2$$

から

$$D_{\vec{v}}(f)(\mathrm{P}_0) = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 = 3$$

(2)

$$f_x = 2x+y,\quad f_y = x-3y^2$$

から

$$f_x(1,1) = 3,\quad f_y(1,1) = -2$$

となるので

$$D_{\vec{v}}(f)(\mathrm{P}_0) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = -3$$

IV $\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上で定義された関数 $f(x, y)$ が与えられているとします．他方 U の中に C^2 級の曲線 $(x(t), y(t))$ が与えられているとします．このとき

$$F(t) := f(x(t), y(t))$$

を定義します．このとき

$$F''(t) := \left(H(f)(x(t), y(t)) \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}\right) + \left(\nabla(f)(x(t), y(t)), \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}\right)$$

が成立することを示しましょう．

解答

$$F'(t) = f_x((x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y((x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

をもう一度 t で微分すると

$$\begin{aligned} F''(t) &= (f_{xx}((x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_{xy}((x(t), y(t)) \cdot y'(t)) \cdot x'(t) + f_x((x(t), y(t)) \cdot x''(t) \\ &\quad + (f_{yx}((x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_{yy}((x(t), y(t)) \cdot y'(t)) \cdot y'(t) + f_y((x(t), y(t)) \cdot y''(t) \\ &= f_{xx}((x(t), y(t)) \cdot (x'(t))^2 + 2f_{xy}((x(t), y(t)) \cdot x'(t)y'(t) + f_{yy}((x(t), y(t)) \cdot (y'(t))^2 \\ &\quad + f_x((x(t), y(t)) \cdot x''(t) + f_y((x(t), y(t)) \cdot y''(t) \\ &= \left(\begin{pmatrix} f_{xx}((x(t),y(t)) & f_{xy}((x(t),y(t)) \\ f_{yx}((x(t),y(t)) & f_{yy}((x(t),y(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} f_x((x(t),y(t)) \\ f_y((x(t),y(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(H(f)(x(t), y(t)) \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}\right) + \left(\nabla(f)(x(t), y(t)), \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

V 第 1 象限

$$\mathbf{R}^2_{++} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x, y > 0\}$$

の上で定義されている関数は

$$f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y) \quad (t > 0,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2_{++})$$

が成立するとき λ 斉次であるといいます．

(1) この状況で，さらに f が $\mathbf{R}^2_{++}$ で C^1 級ならば

$$x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = \lambda f(x, y) \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2_{++}) \qquad \text{(EQ)}$$

が成立することを示しましょう．

(2) 逆に $\mathbf{R}^2$ 上で C^1 級の f が (EQ) を満たすならば f は λ 次斉次であることを示しましょう．

解答 (1)

$$f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y) \quad (t > 0,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2_{++})$$

の両辺を t で微分すると

$$f_x(tx,ty)\cdot x + f_y(tx,ty)\cdot y = \lambda t^{\lambda-1} f(x,y) \quad (t>0,\ (x,y)\in\mathbf{R}^2_{++})$$

となります．これに $t=1$ を代入すると

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = \lambda f(x,y) \quad ((x,y)\in\mathbf{R}^2_{++}) \tag{EQ}$$

となります.

(2)

$$\begin{aligned}\left(t^{-\lambda} f(tx,ty)\right)' &= -\lambda t^{-\lambda-1} f(tx,ty) + t^{-\lambda}\cdot(f_x(tx,ty)x + f_y(tx,ty)y)\\ &= -\lambda t^{-\lambda-1} f(tx,ty) + t^{-\lambda}\left(t^{-1}\lambda f(tx,ty)\right)\\ &\equiv 0\end{aligned}$$

から t に関して $t^{-\lambda} f(tx,ty)$ は一定となります．従って

$$t^{-\lambda} f(tx,ty) = f(x,y) \quad \text{すなわち} \quad f'tx,ty) = t^{\lambda} f(x,y)$$

であることが分かります.