第 8 講義 06 月 22 日　演習問題解答

I 以下の関数が第 1 象限 $\mathbf{R}^2_{++}$ 上で Euler 方程式を満たすことを示しましょう.
(1) $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, **(2)** $u(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$

解答 (1)

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ u_y &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

となりますから

$$\begin{aligned} xu_x+yu_y &= \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}=u \end{aligned}$$

となりますから $u(x,y)$ は Euler の等式を満たすことが分かります.

(2)

$$u_x=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}},\quad u_y=\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$$

から

$$\begin{aligned} xu_x+yu_y &= \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} \\ &= x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}=u \end{aligned}$$

となりますから $u(x,y)$ は Euler の等式を満たすことが分かります.

II $\alpha,\beta>0$, $\rho>0$ を定数として CES 関数を

$$Y=F(K,L)=(\alpha K^\rho+\beta L^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \tag{1}$$

と定義します. **(1)** $\log F(K,L)$ を K, L で微分して $F_K(K,L)$, $F_L(K,L)$ を求めましょう.
(2) $F(K,L)$ が Euler の等式

$$K\cdot F_K(K,L)+L\cdot F_L(K,L)=F(K,L) \tag{2}$$

を満たすことを示しましょう.

解答 (1)

$$\log F(K,L)=\frac{1}{\sigma}\cdot\log\left(\alpha K^\sigma+\beta L^\sigma\right)$$

の両辺を K, L で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{F_K(K,L)}{F(K,L)} &= \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\sigma\alpha K^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma+\beta L^\sigma}=\frac{\alpha K^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma+\beta L^\sigma} \\ \frac{F_L(K,L)}{F(K,L)} &= \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\sigma\beta L^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma+\beta L^\sigma}=\frac{\alpha L^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma+\beta L^\sigma} \end{aligned}$$

となります. これから

$$\begin{aligned} F_K(K,L) &= \frac{\alpha K^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma+\beta L^\sigma}\cdot F(K,L) \\ F_L(K,L) &= \frac{\beta L^{\sigma-1}}{\alpha K^\sigma+\beta L^\sigma}\cdot F(K,L) \end{aligned}$$

となります.

(2)(1) の最後の 2 式にそれぞれ K と L を掛けて加えると

$$K \cdot F_K(K,L) + L \cdot F_L(K,L) = \frac{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma}{\alpha K^\sigma + \beta L^\sigma} \cdot F(K,L) = F(K,L)$$

から $F(K,L)$ が Euler の等式を満たすことが分かります.

III $\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上で定義された関数 $f(x,y)$ が与えられているとします. 他方 U の中に C^2 級の曲線 $(x(t), y(t))$ が与えられているとします. このとき

$$F(t) := f(x(t), y(t))$$

を定義します. このとき

$$F''(t) := \left(H(f)(x(t),y(t)) \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \right) + \left(\nabla(f)(x(t),y(t)), \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} \right)$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$F'(t) = f_x((x(t),y(t)) \cdot x'(t) + f_y((x(t),y(t)) \cdot y'(t)$$

をもう一度 t で微分すると

$$\begin{aligned} F''(t) &= (f_{xx}((x(t),y(t)) \cdot x'(t) + f_{xy}((x(t),y(t)) \cdot y'(t)) \cdot x'(t) + f_x((x(t),y(t)) \cdot x''(t) \\ &\quad + (f_{yx}((x(t),y(t)) \cdot x'(t) + f_{yy}((x(t),y(t)) \cdot y'(t)) \cdot y'(t) + f_y((x(t),y(t)) \cdot y''(t) \\ &= f_{xx}((x(t),y(t)) \cdot (x'(t))^2 + 2f_{xy}((x(t),y(t)) \cdot x'(t)y'(t) + f_{yy}((x(t),y(t)) \cdot (y'(t))^2 \\ &\quad + f_x((x(t),y(t)) \cdot x''(t) + f_y((x(t),y(t)) \cdot y''(t) \\ &= \left(\begin{pmatrix} f_{xx}((x(t),y(t)) & f_{xy}((x(t),y(t)) \\ f_{yx}((x(t),y(t)) & f_{yy}((x(t),y(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} f_x((x(t),y(t)) \\ f_y((x(t),y(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(H(f)(x(t),y(t)) \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \right) + \left(\nabla(f)(x(t),y(t)), \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$