IV.

$$g(x, \varphi(x)) \equiv 0$$

が $x=a$ の近傍で成立ちます　この両辺を x で微分すると

$$g_x(x, \varphi(x))\cdot 1 + g_y(x, \varphi(x))\cdot \varphi'(x) \equiv 0 \quad \cdots (1)$$

となります。もう一度 x で微分すると

$$g_{xx}(x,\varphi(x))\cdot 1 + g_{xy}(x, \varphi(x))\cdot \varphi'(x)$$

$$+ \varphi'(x)\left(g_{yx}(x, \varphi(x))\cdot 1 + g_{yy}(x, \varphi(x))\cdot \varphi'(x)\right)$$

$$+ g_y(x, \varphi(x))\cdot \varphi'(x) \equiv 0 \quad -- (2)$$

となります。Youngの定理を用いて整理して $x=a$ を代入すると

$$g_{xx}(a,b)+2g_{xy}(a,b)\varphi'(a)+g_{yy}(a,b)\cdot \varphi'(a)^2$$

$$+ g_y(a,b)\cdot \varphi''(a) = 0$$

となります。$g_y(a,b) \neq 0$ で両辺を割ると

$$\varphi''(a) = -\frac{1}{g_y(a,b)}\Big(g_{xx}(a,b) + 2g_{xy}(a,b)\varphi'(a)$$

$$+ g_{yy}(a,b)\varphi'(a)^2 \Big) \cdots (3)$$

を得ます。(1)に $x=a$ を代入すると

$$\varphi'(a) = -\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}$$

となりますから、これを(3)に代入すると

$$\varphi''(a) = -\frac{1}{g_y(a,b)^3}\Big(g_{xx}(a,b)\,g_y(a,b)^2$$

$$-2g_{xy}(a,b)\,g_x(a,b)\,g_y(a,b)$$

$$+ g_{yy}(a,b)\,g_x(a,b)^2 \Big)$$

$$= \frac{1}{g_y(a,b)^3}\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & g_{xx} & g_{xy} \\ g_y & g_{yx} & g_{yy} \end{vmatrix}(a,b)$$

V (1) $U_x = F'(u(x,y))\,u_x$, $U_y = F'(u(x,y))\,u_y$.

から

$$-\frac{U_x(x,y)}{U_y(x,y)} = -\frac{F'(u(x,y))\,u_x(x,y)}{F'(u(x,y))\,u_y(x,y)}$$

$$= -\frac{u_x(x,y)}{u_y(x,y)}$$

注) $u(x,y)$ と $U(x,y)$ が (a,b) で定める無差別曲線の傾きが等しいことを意味します.

(2) $F'(t) > 0$ が常に成立するので $u_1 < u_2$ ならば

$$F(u_1) < F(u_2)$$

が従います. よって $u(a_1, b_1) < u(a_2, b_2)$

ならば

$$F(u(a_1, b_1)) < F(u(a_2, b_2))$$

すなわち

$$U(a_1, b_1) < U(a_2, b_2)$$

(3) $U_{xx} = F''(u)\cdot u_x^2 + F'(u)\, u_{xx}$.

$$U_{xy} = F''(u)\cdot u_x u_y + F'(u)\, u_{xy}$$

$$U_{yy} = F''(u)\cdot u_y^2 + F'(u)\, u_{yy}$$

から

$$\begin{vmatrix} 0 & U_x & U_y \\ U_x & U_{xx} & U_{xy} \\ U_y & U_{yx} & U_{yy} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & F' u_x & F' u_y \\ F' u_x & F''\cdot u_x^2 \cancel{+} + F' u_{xx} & F'' u_x u_y + F' u_{xy} \\ F' u_y & F''\cdot u_x u_y + F' u_{yx} & F'' u_y^2 + F' u_{yy} \end{vmatrix}$$

$$= (F')^2 \begin{vmatrix} 0 & u_x & u_y \\ u_x & F'' u_x^2 + F' u_{xx} & F'' u_x u_y + F' u_{xy} \\ u_y & F'' u_x u_y + F' u_{yx} & F'' u_y^2 + F' u_{yy} \end{vmatrix}$$

$$= (F')^2 \begin{vmatrix} 0 & u_x & u_y \\ u_x & F' u_{xx} & F' u_{xy} \\ u_y & F' u_{yx} & F' u_{yy} \end{vmatrix}$$

$\uparrow$

2列 += 1列 × $(-F')$

3列 += 1列 × $(-F')$

$$= (F')^3 \begin{vmatrix} 0 & u_x & u_y \\ u_x & u_{xx} & u_{xy} \\ u_y & u_{yx} & u_{yy} \end{vmatrix}$$

明らかに $\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & \lambda A & \lambda C \\ \beta & \lambda C & \lambda B \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & A & C \\ \beta & C & B \end{vmatrix}$

を用いました。

(注) スケール変換でつち付き Hesse 行列式の符号が変わらないことを意味します．

Leibnitz

V1 $$(A(p)p^{\xi})' = A'(p)\cdot p^{\xi} + A(p)\cdot \xi p^{\xi-1}$$

$$= -\xi \frac{A(p)}{p}\cdot p^{\xi} + A(p)\xi p^{\xi-1}$$

$$= -\xi A(p)p^{\xi-1} + A(p)\xi p^{\xi-1}$$

$$\equiv 0$$

から $A(p)p^{\xi} =$ 定数 を意味します．$p=0$ を代入して

$$A(p)p^{\xi} = A(0)\cdot 1$$

から

$$A(p) = A(0)p^{-\xi}$$

が従います

Leibnitz

V11 $$(f(t)e^{-at})' = f'(t)e^{-at} + f(t)(-ae^{-at})$$

$$= af(t)e^{-at} - af(t)e^{-at}$$

$$\equiv 0$$

から $f(t)e^{-at} \equiv$ 定数が分かります．$t=0$ を代入して

$$f(t)e^{-at} = f(0)$$

から

$$f(t) = f(0)e^{at}$$